АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ VI
ВЫПУСК
4

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1961

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., Гнеденко Б. В., Золотарев В. М. (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С., Линник Ю. В., Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А., Смирнов Н. В.***

СОДЕРЖАНИЕ

Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. II 377
Linnik Yu. V. Limit Theorems for the Sums of Independent Variables Taking into Account the Big Deviations II. 391
Клосс Б. М. Предельные распределения на бикомпактных абелевых группах . 392
Kloss B. M. Limiting Distributions on Bicompact Abelian Groups 421

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Воробьев Н. Н. Аналитическая характеризация независимости и марковости . . 422
Vorobjev N. N. An Analytical Characterization of Independence and Markov Type Dependence 426
Романовский И. В. Случайные блуждания игрового типа 426
Romanovsky I. V. Game-type Random Walks 429
Скороход А. В. Аддитивные функционалы от процесса брауновского движения 430
Skorohod A. V. Additive Functionals of the Brownian Movement Process . . 439
Вентцель А. Д. Об абсолютной непрерывности переходных вероятностей одномерного диффузионного процесса 439
Wentzell A. D. Sur la Continuité Absolue des Probabilités de transition d'un Processus de Diffucion un-dimensionnel 446
Большев Л. Н., Гладков Б. В., Щеглова М. В. Таблицы для вычисления функций B и Z-распределений 446
Bolshev L. N., Gladkov B. V., Ščeglova M. V. Tables for Calculation of B and Z-distribution Functions 454
Баваров Е. А., Беляев П. Ф. О проверке случайности выбора без возвращения . . 455
Bavarov E. A., Beljaev P. F. On Testing the Randomness of Sampling without Replacement 458
Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Некоторые задачи с условной вероятностью и квазимоментные функции 458
Kuznetsov P. I., Stratonovich R. L., Tihonov V. I. Some Problems with Conditional Probability and Yuasimoment Functions 464
Полищук Е. М. О континуальных средних и сингулярных распределениях . . 465
Poliščuk E. M. On Continual Means and Singular Distributions 469
Золотарев В. М., Королюк В. С. Об одной гипотезе Б. В. Гнеденко 469
Zolotarev V. M., Koroljuk V. S. Ona hipo thesis proposed by B. V. Gnedenko . 474
Булинская Е. В. О среднем числе пересечений некоторого уровня стационарным гауссовским процессом 474
Bulinskaya E. V. On the Mean Number of Crossings of a Level by *a* Stationary Gaussian Process 478
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара по математической статистике в Математическом ин-те АН СССР 478
Содержание шестого тома 485

Адрес редакции: Москва, В—234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1961

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ. II

Ю. В. ЛИННИК

2. Узкие зоны локального и интегрального нормального притяжения.

0. Мы будем следовать обозначениям предыдущей работы [16]. Будем зучать узкие зоны локальной нормальной сходимости для величин X_j класа (d) (см. [16]). Нам будет удобнее исходить не из зон $[0, \psi(n)]$ и $-\psi(n), 0]$, а из функций $h(x)$, описанных в п. 1, [16]. Рассмотрим условие

$$\mathbf{E}\exp h(|X_j|) < \infty. \tag{0.1}$$

усть задана функция $h(x)$ класса 1 работы [16]. Она подчинена указан ым в [16] условиям:

$$(\log x)^{2+\xi_0} \leqslant h(x) \leqslant x^{1/2}, \ (x \geqslant 1) \tag{0.2}$$

$(x) = \exp(H(\log x))$, где $H(z)$ монотонна, дифференцируема,

$$H'(z) \leqslant 1; \ H'(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty, \tag{0.3}$$

$$H'(z)\exp H(z) > c_1 z^{1+\xi_1}. \tag{0.4}$$

Определим новую положительную функцию $\Lambda(n)$ посредством уравнения

$$h(\sqrt{n}\Lambda(n)) = (\Lambda(n))^2. \tag{0.5}$$

Теорема 1. *Условие* (0.1), *где* $h(x)$ *принадлежит классу* 1, *необходимо ля того, чтобы зоны* $[0, \Lambda(n)\rho(n), 0]$ *были з. р. л. н. п., и достаточно ля того, чтобы зоны* $[0, \Lambda(n)/\rho(n)]$; $[-\Lambda(n)/\rho(n), 0]$ *были з. р. л. н. п.*

Теорема 2. *Для з. н. п. (интегральных) верно такое же высказывание, ак в теореме* 1, *и сходимость в соответствующих зонах равномерна.*

Для $h(x)$, принадлежащих классу II, определим $\Lambda(n)$ из условия: $\Lambda(n) = \sqrt{h(n)} = \sqrt{M(n)\log n}$. В силу свойств $h(n)$, так определенная $\Lambda(n)$ удет отличаться от $\rho(n)$ лишь множителем $\Lambda(n)$, определенной из уравнения (0.5). Далее имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Если* $h(x)$ *принадлежит классу* II, *то для з. р. л. н. п. ерно высказывание, аналогичное теореме* 1 *при указанной выше функции* $\Lambda(n)$.

Теорема 4. *Для* $h(x)$ *из класса* II, *и указанных выше* $\Lambda(n)$, *для . н. п. верно высказывание, аналогичное теореме* 3.

Для $h(x)$ класса III имеем самые узкие зоны. Здесь полагаем $\Lambda(n) = \sqrt{\log n}$.

Теорема 5. *Для $h(x)$ класса III и $\Lambda(n) = \sqrt{\log n}$ в отношении з. л. н. п. и величин $X_j \in (d)$ верно такое же высказывание, как в теореме а в отношении з. н. п. — такое же высказывание, как в теореме 2.*

1. Выясним сперва целесообразность условий (0.2), (0.3) и (0.4), нал женных на $h(x)$.

Условие $h(x) \geqslant (\log x)^{2+\xi_0}$ (значение которого еще прояснится в дальнейше обеспечивает то, что зоны не самые узкие и его можно сравнить с усл вием $\mathrm{E} \exp 3 \log |X_j| < \infty$, которое обеспечивает лишь существование трет его момента. Условие $h(x) \leqslant x^{1/2}$ указывает на то, что зоны узкие (см. п. работы [16]). Согласно теореме 3 работы [16], зонам $[0, n^{\alpha}(\rho(n))^{\pm 1}$ $[-n^{\alpha}(\rho(n))^{\pm 1}, 0]$ при $\alpha < \frac{1}{6}$ отвечает условие вида (2.1) (из [16]); пр $\alpha < \frac{1}{6}$ показатель $4\alpha/2\alpha + 1$ в этом условии $< 1/2$. Естественно счита $h(x)$ монотонной, дифференцируемой и представлять ее в виде $h(x) =$ $= \exp(H(\log x))$ при $x \geqslant 1$, где $H(z)$ — такая же. Если еще предположи $h'(x)$ монотонной (что естественно), то это приводит к условию (0.3) (узос зоны). Нарушение (0.4) при указанной монотонности $h'(x)$ привело бы нарушению левого неравенства в (0.2).

2. Обратимся к доказательству необходимости условия (0.1) для тог чтобы $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$; $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были з. н. п. Пусть указанные зон будут з. н. п. Тогда при $n > n_0$ имеем: (ибо $\Lambda(n) \to \infty$ при $n \to \infty$).

$$\mathbf{P}\left(Z_n \geqslant \frac{\Lambda(n)\rho(n)}{2}\right) < \exp\left(-\frac{(\Lambda(n)\rho(n))^2}{16}\right). \tag{2.1}$$

Пусть условие (0.1) не выполнено. Тогда найдется последовательност $x_m \to \infty$ такая, что либо

$$\mathbf{P}(X_1 \geqslant x_m) > \exp(-2h(x_m)), \tag{2.2}$$

либо

$$\mathbf{P}(X_1 \leqslant -x_m) > \exp(-2h(|x_m|)). \tag{2.3}$$

Пусть выполнено (2.2). Для достаточно большого m выберем n такое что $x_m = \sigma n^{1/2}\Lambda(n)\rho(n) + \theta$; $|\theta| \leqslant 1$. Событие, указанное в (2.1), наверно произойдет, если случатся два независимых события: $X_1 > \sigma n^{1/2}\Lambda(n)\rho(n) + \theta$ $X_2 + X_3 + \ldots + X_n/\sigma\sqrt{n} < 1$. Отсюда, по центральной предельной теоре ме и (2.2), имеем:

$$\mathbf{P}\left(Z_n > \frac{\Lambda(n)\rho(n)}{2}\right) > c_0 \mathbf{P}(X_1 > x_m) > c_0 \exp(-2h(x_m)) =$$

$$= c_0 \exp[-2h(\sigma\sqrt{n}\Lambda(n)\rho(n) + \theta)] > c_0 \exp[-2h(2\sigma\sqrt{n}\Lambda(n)\rho(n))]. \tag{2.4}$$

При ξ, η достаточно больших согласно условию (0.3)

$$h(\xi\eta) = \exp H(\log\xi + \log\eta) \leqslant \exp(H(\log\xi) + o(\log\eta)) = h(\xi)\eta^{o(1)}. \tag{2.5}$$

Полагая $\xi = \sqrt{n}\Lambda(n)$; $\eta = 2\sigma\rho(n)$, найдем

$$2h(2\sigma\sqrt{n}\Lambda(n)\rho(n)) = 2(\Lambda(n))^2(\rho(n))^{o(1)}, \tag{2.6}$$

что противоречит (2.1). Аналогичное рассуждение проводится для случая (2.3). Если $X_j \in (d)$ (см. [1]), то условие (0.1) необходимо для того, чтобы

$\Lambda(n)\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были обе з. р. л. н. п. Доказательство проводится аналогично предыдущему при учете рассуждений п. 4 работы [16].

3. Перейдем к вопросу о достаточности условия (0.1) для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п. при $X_j \in (d)$. Мы можем в условии (0.1) рассматривать функцию $ah(x)$ вместо $h(x)$ (a положительные константы), и поэтому не нарушая общности, считать $\sigma = 1$. При данном $\rho(n)$, будем определять функцию $\Lambda_\rho(n)$ из уравнения

$$h\left(\Lambda_\rho(h)\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) = (\Lambda_\rho(n))^2. \tag{3.1}$$

Если мы докажем, что зона $[0, \Lambda_\rho(n)]$ есть з. р. л. н. п., то зона $\left[0, \frac{\Lambda(n)}{\rho(n)}\right]$ тоже будет таковой, так как она уже. В самом деле, полагая $\Lambda_\rho(n) = \Lambda(n)\gamma(n)$, находим из (3.1), (0.5) и рассуждений п. 2:

$$(\gamma(n)(\rho(n))^{-1})^{o(1)} = (\gamma(n))^2;\ \gamma(n) = \left(\frac{1}{\rho(n)}\right)^{o(1)}.$$

Положим

$$\log \Lambda_\rho(n) = X_\rho(n), \tag{3.2}$$

получим из (3.1)

$$H\left(\log \Lambda_\rho(n) + \log\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) = 2X_\rho(n). \tag{3.3}$$

Полагая теперь

$$l_\rho(n) = \log\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)} = \frac{1}{2}\log n - \rho_1(n), \tag{3.4}$$

имеем:

$$H(X_\rho(n) + l_\rho(n)) = 2X_\rho(n);\ X_\rho(n) + l_\rho(n) = H^{-1}(2X_\rho(n)). \tag{3.5}$$

Определим далее малое число μ из условия:

$$n^{1-2\mu} = e^B(\Lambda_\rho(n))^2 = e^B \exp(2X_\rho(n)) \tag{3.6}$$

(B, как и в работе [16], ограниченное число, не всегда одно и то же). Поскольку

$$(1-2\mu)\log n = B + 2X_\rho(n), \tag{3.7}$$

$$\mu\log n = B + \frac{\log n}{2} - X_\rho(n) = l_\rho(n) + X_\rho(n) + \rho_2(n) - 2X_\rho(n),$$

и, учитывая (3.5) найдем

$$\mu\log n = H^{-1}(2X_\rho(n)) + \rho_2(n) - 2X_\rho(n), \tag{3.8}$$

тогда как (3.7) дает

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{X_\rho(n)}{\log n} + \frac{B}{\log n}. \tag{3.9}$$

4. Теперь получим в обозначениях работы [16] (см. 16) ф-лы (5.6); (6.5):

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} (\varphi(t))^n \exp(-itx\sqrt{n})\,dt + B\exp(-c_1 e^{2X_\rho(n)}). \tag{4.1}$$

Имея в виду применение метода работы [16], мы хотим оценить $\varphi^{(q)}(t)$ пр $|t| \leqslant n^{-\mu}$:

$$\varphi^{(q)}(t) = B\int_1^\infty x^q \exp(-h(x))\,dx = B\int_1^\infty \exp(q\log x - h(x))\,dx. \quad (4.$$

Установим теперь, что

$$xh'(x) \to \infty \text{ при } x \to \infty. \quad (4.$$

Действительно,

$$h(x) = \exp H(\log x);\ xh'(x) = \frac{dh(x)}{d\log x} = \exp(H(\log x))\,H'(\log x) \to \infty$$

при $x \to \infty$

в силу (0.4). Подынтегральная функция в (4.2) в экспоненте имеет ви $q\log x - h(x)$, а ее производная $\frac{q}{x} - h'(x)$. Составим уравнение перевала

$$xh'(x) = q. \quad (4.$$

В силу (4.3), оно имеет единственное решение при $q > q_0$. Это решени обозначим $Q_0(q)$.

Лемма 1. *Справедлива оценка вида*

$$\int_1^\infty x^q \exp(-h(x))\,dx = B\exp(Bq + q\log Q_0(q) - h(Q_0(q))). \quad (4.5$$

Найдем абсциссу $x = x_1$ такую, что при $x \geqslant x_1$:

$$h(x) \geqslant 2q\log x;\ h(x) - q\log x \geqslant \frac{h(x)}{2}. \quad (4.6$$

Так как $h(x) \geqslant (\log\alpha)^{2+\xi_0}$ согласно (0.2), то (4.6), наверное, будет выпол нено, если $(\log x)^{2+\xi_0} \geqslant 2q\log x$; $\log x \geqslant (2q)^{\frac{1}{1+\xi_0}}$; $x \geqslant \exp(2q)^{\frac{1}{1+\xi_0}} = x_1$, та как при $x \geqslant x_1$ $h(x) - q\log x \geqslant \frac{1}{2}h(x) \geqslant \frac{1}{2}(\log x)^{2+\xi_0}$, то мы имеем

$$\int_{x_1}^\infty x^q \exp(-h(x))\,dx = B. \quad (4.7$$

Функция $q\log x - h(x)$ имеет максимум при $x = Q_0(q)$ и далее убывае (см. (4.4)), так что

$$\int_1^\infty x^q \exp(-h(x))\,dx = B\exp(Bq + q\log Q_0(q) - h_1(Q_0(q))). \quad (4.8$$

Привлекая лемму 1, получаем

$$\frac{\varphi^{(q)}(t)}{q!} = B\exp q\left(B + \log Q_0(q) - \frac{1}{q}h(Q_0(q)) - \log q\right). \quad (4.9$$

Полагая (как в [16], (6.7))

$$\widetilde{\varphi}_q(t+t_0) = \varphi(t_0) + \frac{t\varphi'(t_0)}{1!} + \ldots + \frac{t^q\varphi^{(q)}(t_0)}{q!}, \quad (4.10$$

получим при $K(t) = \log\varphi(t)$, $(|t| \leqslant \varepsilon_0)$:

$$K^{(q)}(t_0) = (\log\widetilde{\varphi}_q(t+t_0))^q\big|_{t=0}. \quad (4.11$$

5. Положим

$$L(q) = \log Q_0(q) - \frac{1}{q} h(Q(q)) - \log q \tag{5.1}$$

покажем, что $L(q)$ — неубывающая функция q. Из равенства

$$Q_0(q) h'(Q_0(q)) = q \tag{5.2}$$

ростым подсчетом выводим, что

$$L'(q) = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} h(Q_0(q)) - 1\right). \tag{5.3}$$

Достаточно показать, теперь, что $h(Q_0(q)) \geqslant q$ или $h(Q_0(q)) \geqslant Q_0(q) h'(Q_0(q))$ или $d \log h(y)/d \log y \leqslant 1$, т. е. $H'(z) \leqslant 1$, что отвечает 0.3). Итак, $L(q)$ монотонна. Из (4.9) выводим:

$$\frac{\varphi^{(q)}(t_0)}{q!} t^q = B |t|^q \exp(Bq + qL(q)). \tag{5.4}$$

ыберем контур $|t| = e^{-\nu}$ так, чтобы на нем (5.4) оказалось достаточно алым. Положим:

$$\nu = \nu(q) = c_1 + L(q), \tag{5.5}$$

де c_1 достаточно велико. Тогда, при $|t| = e^{-\nu}$:

$$B \exp(Bq - c_1 q - qL(q) + qL(q)) = B \exp\left(-\frac{c_1}{2} q\right) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^q, \tag{5.6}$$

$$\frac{t\varphi'(t_0)}{1!} + \frac{t^2\varphi''(t_0)}{2!} + \ldots + \frac{t^q\varphi^{(q)}(t_0)}{q!} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5.7}$$

ак что:

$$\frac{3}{2} \geqslant |\widetilde{\varphi}_q(t)| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{5.8}$$

тсюда при $|t_0| \leqslant n^{-\mu}$ получаем

$$K^{(q)}(t_0) = \frac{r!}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=e^{-\nu}} \log \widetilde{\varphi}_q(t) \frac{dt}{t^{q+1}} = Bq' \oint\limits_{|t|=e^{-\nu}} \frac{|dt|}{|t|^{q+1}} =$$

$$= Bq' \exp(q^{\nu}(q)) = B \exp(Bq + q \log Q_0(q) - h(Q_0(q))). \tag{5.9}$$

$$\sup_{|t| \leqslant n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t) \frac{t^m}{m!} \right| = B \exp\left\{m(B + \log Q_0(m) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m} h(Q_0(m)) - \log m - \mu \log n)\right\}. \tag{5.10}$$

пределим теперь m с помощью равенств

$$\log Q_0(m) = H^{-1}(2X_\rho(n)); \tag{5.11}$$

$$\exp H(\log Q_0(m)) = h(Q_0(m)) = \exp[2X_\rho(n)]. \tag{5.12}$$

одставим это в (5.10) и, учитывая (3.8), приведем (5.10) к виду:

$$B \exp\left\{m\left(B - \rho_2(n) + 2X_\rho(n) - \log m - \frac{1}{m} \exp 2X_\rho(n)\right)\right\} =$$

$$= B \exp\{m(B - \rho_2(n) - \exp(2X_\rho(n) - \log m) + 2X_\rho(n) - \log m)\}. \tag{5.13}$$

Покажем теперь, что

$$2X_\rho(n) - \log m \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{5.1}$$

В силу (5.2)

$$\exp H(\log Q_0(m))\, H'(\log \varphi_0(m)) = Q_0(m)\, h'(Q_0(m)) = m. \tag{5.1}$$

Из (5.11) находим: $H(\log \varphi_0(m)) = 2X_\rho(n)$. Подставим в (5.15)

$$\exp(2X_\rho(n))\, H'(\log Q_0(m)) = \exp(2X_\rho(n))\, H'(X_\rho(n) + l(n)) = m.$$

Отсюда в силу (0.3)

$$2X_\rho(n) - \log n = -\log H'(X_\rho(n) + l_\rho(n)) \to \infty. \tag{5.1}$$

Привлекая (5.14), получаем для (5.13) оценку:

$$B \exp(-c_2 \exp(2X_\rho(n))). \tag{5.1}$$

Заметим, что в силу (3.6) $\exp(2X_\rho(n)) = Bn^{1-2\mu}$.

6. Теперь (5.10) дает:

$$\sup_{|t| \leqslant n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t)\, \frac{t^m}{m!} \right| = B \exp(-c_2 \exp(2X_\rho(n))), \tag{6.}$$

так что при $|t| \leqslant n^{-\mu}$:

$$K(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{r=3}^{m} \psi_r \frac{t^2}{r!} + B \exp(-c_2 \exp 2X_\rho(n)), \tag{6.}$$

где

$$\psi_r = K^{(r)}(0) = B \exp(Br + r \log Q(r) - h(Q_0(r))). \tag{6.}$$

Ввиду того что $2X_\rho(n) \geqslant H\left(\log \frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) = \log h\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) > \exp(2X_\rho(n))$,

$\geqslant h\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) > \left(\log \frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right)^{2+\varepsilon_0}$, $n \exp(-c_2 \exp 2X_\rho(n)) = B \exp(-c_3 \exp 2X_\rho(n))$

так что

$$nK(t) = nK_2(t) + B \exp(-c_4 n^{1-2\mu}), \tag{6.}$$

где

$$K_2(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{r=3}^{m} \psi_2 \frac{t^2}{r!}. \tag{6.}$$

Отсюда легко выводим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} + K_3(t) - i\sqrt{n}tx\right) dt + B \exp(-c_4 n^{1-2\mu}), \tag{6.}$$

где

$$K_3(t) = \sum_{r=3}^{m} \psi_r \frac{t^2}{r!}. \tag{6.}$$

Займемся целой функцией

$$\exp(nK_3(t)). \tag{6.8}$$

Положим $\mu_1 = \mu - \omega_n$, где малое число ω_n определяется следующим образом: если $\exp(2X_\rho(n))/m \geqslant \log n$, то полагаем $\omega_n = \frac{1}{100}$, а если $\exp 2X_\rho(n)/m \geqslant \log n$, то берем $\omega_n = \frac{1}{100} \frac{\exp 2X_\rho(n)}{m \log n}$.

При $r \leqslant m$ $u|t| \leqslant n^{-\mu_1}$ рассмотрим:

$$\frac{\psi_r t^2}{r!} = B \exp r \left(B + \log \varphi(r) - \frac{1}{r} h(Q_0(r)) - \log r - \mu_1 \log n\right). \quad (6.9)$$

Заметим теперь, что $X_\rho(n) = o(\log n)$, как видно из (3.3) и (0.3) (ибо согласно (0.3), $H(z) = o(z)$). Ввиду этого из (3.7) вытекает, что

$$\mu = \frac{1}{2} + o(1), \quad \mu \geqslant 0{,}49 + o(1). \quad (6.10)$$

Поэтому при $3 \leqslant r < c_3$

$$n \frac{\psi_r t^2}{r!} = o(1). \quad (6.11)$$

Перейдем к случаю $c_3 \leqslant r \leqslant m$. Выделим значения $c_3 \leqslant r \leqslant (\log n)^{1+\xi/2}$ и докажем оценку:

$$\log Q_0(r) = B \exp r^{\frac{1}{1+\xi_1}}. \quad (6.12)$$

Из (0.4) имеем $xh'(x) > (\log x)^{1+\xi_1}$. Ввиду этого из равенства $Q_0(r) h'(Q_0(r)) = r$ следует: $(\log Q_0(r))^{1+\xi_1} < r$; $Q_0(r) < \exp r^{\frac{1}{1+\xi_1}}$, что и доказывает (6.12). При указанных значениях r, (6.9) дает:

$$B \exp r \left(B + r^{\frac{1}{1+\xi_1}} - 0{,}48 \log n\right) = Bn^{-0{,}48r}. \quad (6.13)$$

Суммирование этих выражений по $c_3 \leqslant r \leqslant (\log n)^{1+\xi_1/2}$ дает

$$Bn^{-2}. \quad (6.14)$$

Теперь пусть $(\log n)^{1+\xi_1/2} < r \leqslant m$. В силу монотонности функции $L(r)$ (см. п. 5), (6.9) не превосходит

$$B \exp r \left(B + \log Q_0(m) - \frac{1}{m} h(Q_0(m)) - \log m - \mu_1 \log n\right). \quad (6.15)$$

Сравнивая с (5.10) и (5.13), получим оценку для (6.15)

$$B \exp r \left(B - \frac{1}{2m} \exp 2X_\rho(n) - \rho_2(n) + \omega_n \log n\right). \quad (6.16)$$

Откуда, учитывая определение числа ω_n, находим для (6.9)

$$B \exp r \left(-\frac{\rho_2(n)}{2} - \frac{1}{8} \log n\right) + B \exp r \left(-\frac{\rho_2(n)}{2} - \frac{1}{8n} \exp 2X(n)\right). \quad (6.17)$$

Суммируя эти выражения по r, $(\log n)^{1+\xi_1/2} \leqslant r \leqslant m$, для соответствующей части $K_3(t)$ получаем оценку

$$Bn^{-2}. \quad (6.18)$$

Собирая вместе оценки (6.11), (6.14) и (6.18), находим: при $|t| = n^{-\mu_1}$

$$nK_3(t) = B \exp nK_3(t) = B. \quad (6.19)$$

7. Положим

$$\exp nK_3(t) = \sum_{r=3}^{\infty} \chi_r \frac{t^r}{r!}. \quad (7.1)$$

тогда, в соответствии с (6.19),

$$\chi_r = \frac{r!}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=n^{-\mu_1}} \frac{\exp(nK_3(t))}{t^{r+1}}\, dt = Br!\ n^{2\mu_1}, \tag{7.}$$

$$\frac{\chi_r}{r!}\, t^r = Bn^{r(\mu_1-\mu)} = B\exp(-2\omega_n \log n), \text{ при } r \geqslant m,\ |t| \leqslant n^{-\mu}. \tag{7.}$$

Числа ω_n имеют различные значения в зависимости от поведени $\exp(2X_\rho(n))/m$, как описано в п. 6. Каждый из этих случаев приводит оценке:

$$B\sum_{r=m}^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{100\,m}\exp[2X_\rho(n)]\right) = B\exp\left(-\frac{1}{200}\exp[2X_\rho(n)]\right). \tag{7.}$$

Таким образом,

$$\exp[nK_3(t)] = 1 + \sum_{r=3}^{m} \frac{\chi_r t^r}{r!} + B\exp(-c_4\exp[2X_\rho(n)]), \tag{7.}$$

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} - itx\sqrt{n}\right)\left(1 + \sum_{r=3}^{m}\frac{\chi_r t^r}{r!}\right) +$$

$$+ B\exp(-c_5 e^{2X_\rho(n)}), \tag{7.}$$

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n^{1/2-\mu}}^{n^{1/2-\mu}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right)\left(1 + \sum_{r=3}^{m}\frac{\chi_r}{r!}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) +$$

$$+ B\exp(-c_6 e^{2X_\rho(n)}). \tag{7.}$$

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_{n^{1/2}-\mu}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\,\frac{\chi_2}{r!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \xi^r d\xi. \tag{7.}$$

Следуя п. 8 работы [16], получим для (7.8) оценку при $r \leqslant m$:

$$B\exp\left(-\frac{1}{4}n^{1-2\mu}\right)\exp r\left(B + \frac{\log r}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right)\log n\right) =$$

$$= B\exp\left(-\frac{1}{4}n^{1-2\mu}\right)\exp r\left(B + \frac{\log m}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right)\log n\right). \tag{7.}$$

Далее, так как

$$\exp(2X_\rho(n)) = Bn^{1-2\mu};\ X_\rho(n) = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\log n + B,$$

то $\frac{1}{2}\log m - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right)\log n = \frac{1}{2}\log m - \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\log n + (\mu_1 - \mu)\log n =$

$$= \frac{1}{2}\log m - X_\rho(n) + B - \omega_n < \frac{1}{2}\log m - X_\rho(n) \to -\infty.$$

Суммируя оценки (7.9) по $r = 3, 4, \ldots, m$, найдем погрешность

$$B\exp\left(-\frac{1}{4}n^{1-2\mu}\right) = B\exp(-c_4\exp 2X_\rho(n)). \tag{7.}$$

Оценивая таким же образом интеграл по $(-\infty, -n^{1/2-\mu})$, приходим

рмуле:

$$p_{z_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right)\left(1 + \sum_{r=3}^{m} \frac{\chi_r}{r!}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) + \\ + B\exp\left(-c_5 \exp\left(2X_\rho(n)\right)\right). \qquad (7.11)$$

8. Изучим теперь при $3 \leqslant r \leqslant n$ (см. [16], п. 9):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\xi^2/2 - i\xi x\right)\xi^r d\xi = H_r^{(0)}(x)\, e^{-x^2/2}. \qquad (8.1)$$

При $3 \leqslant r \leqslant c_3$ имеем для (8.1) оценку:

$$Be^{-x^2/2}\sum_{r=3}^{c_3} \frac{|\chi_r|}{r!}|x|^r \frac{1}{(\sqrt{n})^r}. \qquad (8.2)$$

При

$$|x| \leqslant \frac{n^{1/2-\mu}}{\rho(n)}, \qquad (8.3)$$

8.1) получает оценку:

$$Be^{-x^2/2}\sum_{r=3}^{c_3} n^{r\mu_1} n^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} n^{-r/2} \frac{1}{(\rho_1(n))^2} = Be^{-x^2/2}\frac{1}{(\rho_1(n))^3}. \qquad (8.4)$$

Пусть теперь $c_3 < r \leqslant m$. Полагаем $r = q$; $s = \rho q$ $\left(0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Следуя л. 9 (см. (9.7) в работе [16]), получим при $c_4 \leqslant q \leqslant m$:

$$\frac{\chi_q}{q!} n^{-q/2} H_q^{(0)}(x) = B \sup_{\rho} q\,(B - (1-2\rho)\log\rho_1(n) + \\ + \rho\log q - \rho(1-2\mu)\log n + (\mu_1 - \mu)\log n). \qquad (8.5)$$

Так как $\exp\left(2X_\rho(n)\right)/m \to \infty$, то $B_n^{1-2\mu}/m \to \infty$, откуда: $\log q \leqslant \log m \leqslant B + (1-2\mu)\log n$. Таким образом, $\rho\log q - \rho(1-2\mu)\log n = B - v(n)$, где $v(n) \geqslant 0$. Затем (см. п. 6) $(\mu_1 - \mu)\log n = -\omega_n$, $\log n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Так что (8.5) получает оценку

$$B\exp(-c_4 q). \qquad (8.6)$$

Если $q \geqslant \rho_2(n)$, то сумма таких оценок при $\rho_2(n) < q < m$ складывается в общую оценку

$$\frac{B}{\rho_3(n)}. \qquad (8.7)$$

Далее, пусть $\rho_2(n)$ выбрано так, что

$$\log q \leqslant \frac{(1-2\mu)\log n}{2} = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\log n \qquad (8.8)$$

(заметим, что $(1-2\mu)\log n \to \infty$). Тогда (8.5) получит оценку:

$$\sup_{\rho}\left(B\exp\left(-q(1-2\rho)\log\rho_1(n)\right) + B\exp\left(-q\rho\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\log n\right)\right) = \\ = B\exp\left(-q\rho_3(n)\right). \qquad (8.9)$$

Суммируя последнее по $3 \leqslant q \leqslant \rho_2(n)$, получим оценку

$$\frac{B}{\rho_4(n)}. \tag{8.}$$

Это и доказывает локальную предельную теорему для зон $[0, n^{1/2-\mu}/\rho_1($ и $[-n^{1/2-\mu}/\rho_1(n), 0]$. Далее, в силу (3.1) и (3.6): $\Lambda_\rho(n) = \exp(X_\rho(n))$ $= e^B n^{1/2-\mu}$. Это доказывает теорему 1.

9. Перейдем к интегральной теореме 2, следуя пп. 11—14 работы [1 Пусть X_j теперь случайные величины общего вида; $\mathbf{E}X_j = 0$; $\mathbf{D}(X_j) =$ Пусть $h(x)$ функция класса 1 и выполнено условие (0.1). Вначале следу п. 3. Определим μ из условия (3.6) и положим $\alpha = \frac{1}{2} - \mu$. Будем доказ вать, что зоны $[0, n^\alpha/\rho_5(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho_5(n), 0]$ суть з.н. п. Остановимся на пе вой из них. Будем следовать обозначениям и рассуждениям пп. 11—14 работ [16], указывая лишь существенные отличия. Для нас важно, что (см. (3.3

$$n^{1/2-\mu} = n^\alpha = e^B \exp(X_\rho(n)) > \left(h\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right)\right)^{1/2} > (\log n)^{1+\xi_0/2}. \tag{9.}$$

Следуя рассуждениям и обозначениям работы 16, пп. 11—14, вводим Y $\psi_n(t)$ и приходим к формуле (12.3) работы [16].

Заметим, что $n^{2\alpha} = n^{1-2\mu} > (\log n)^{2+\xi_0}$, так что:

$$n^{K+1} \exp(-c_6 n^{2\alpha}) = \exp(-c_7 n^{2\alpha}) \tag{9.}$$

(см. [16], ф-ла (12.5)).

Ввиду этого, имеют место формулы (12.7) и (12.8); (13.1) — (13.5) р боты [16]. Для χ_r берется оценка (7.2) этой работы. Следуя п. 13 работ [16], приходим к формуле (13.11). Нам придется, однако, далее дать боле точную оценку в этой формуле. Она записывается так:

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2/2} H_q^{(0)}(x)\,dx = B^q q! \sum_{s \leqslant \frac{q}{2}} \frac{1}{q!\,(q-2s)!} \int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} u^{q-2s} du. \tag{9.}$$

При $1 \leqslant x_1 \leqslant n^\alpha/\rho_8(n)$, $Q = q - 2s = q(1 - 2\rho)$ по методу перевала леги находим оценку ($Q \geqslant 1$):

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} u^Q du = B^Q x_1^{Q-1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2} Q \left|\log \frac{Q}{x^2}\right| + \frac{1}{2} Q\right). \tag{9.}$$

Мы видим, что если $x_1^2 \geqslant m \geqslant Q$; $x_1 \geqslant \sqrt{m} \geqslant \sqrt{Q}$, то (9.4) приводит оценке

$$B^Q x_1^{Q-1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right). \tag{9.}$$

Рассуждая, как в п. 8, придем к доказательству интегральной предельно теоремы для зоны $[\sqrt{m}, n^\alpha/\rho_2(n)]$. Пусть теперь $x_1 < \sqrt{m}$. Тогда (9.4 оцениваем величиной

$$B^Q x_1^{Q-1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} Q \log Q\right). \tag{9.}$$

При $s = \rho q$, $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ берем соответствующий член (9.3), учитывае оценку (9.9) и оценки $\chi_q/q! = B \exp(\mu_1 q \log n)$; $n^{-q/2} = \exp(-q \log n/2$ которые нужно умножить на этот член. В результате при умножении н

$\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)$ имеем следующую оценку (см. п. 9 работы [16]; $x_1 \leqslant \sqrt{m}$):

$$B \exp q \left(B + (1-2\rho)\frac{1}{2}\log m - \rho \log q - (1-2\rho)\log q + \log q - \right.$$
$$\left. - \rho \log \rho - (1-2\rho)\log(1-2\rho) - \frac{1}{2}\log n + \mu_1 \log n \right) =$$
$$= B \exp q \left(B + \left(\frac{1}{2} - \rho\right)\log m + \rho \log q - \rho \log \rho - (1-2\rho)\log(1-2\rho) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right)\log n \right) = B \exp q \left(B + \frac{1}{2}\log m - \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\log n - \omega_n \log n \right). \tag{9.7}$$

Далее, $\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\log n - \frac{1}{2}\log m \to \infty$, $\omega_n \log n \to \infty$ (см. п. 8). Поэтому (9.7) имеет оценку

$$B \exp\left(-q\rho_7(n)\right). \tag{9.8}$$

Суммируя эту оценку по $3 \leqslant q \leqslant m$, найдем оценку

$$\frac{B}{\rho_8(n)}, \tag{9.9}$$

которая и доказывает интегральную теорему для зоны $[1, \sqrt{m}]$. Зона $[-n^{\alpha}/\rho_6(n) - 1]$ трактуется аналогично, а зона $[-1, 1]$ отвечает известным теоремам. Тем самым, теорема 2 доказана.

10. Перейдем к теоремам 3, 4 и 5. Они касаются самых узких зон. Функции $h(x)$ класса III (см. [16]; (1.5)), удовлетворяющие условию

$$3 \log x \leqslant h(x) \leqslant M \log x, \tag{10.1}$$

где M — константа, отвечают случаю существования третьего момента, но вообще говоря, несуществованию моментов, начиная с некоторого номера. В этом случае классическими средствами (см. (1)) можно установить, что $[0, \sqrt{\log n}/\rho(n)]$ и $[-\sqrt{\log n}/\rho(n), 0]$ будут з. р. л. н. п. для величин класса (d), и з. н. п. вообще, и что зоны $[0, \sqrt{\log n}\,\rho(n)]$; $[-\sqrt{\log n}\,\rho(n), 0]$ не будут таковыми, если не все моменты существуют. Это и составляет содержание теоремы 5. К тем же результатам можно прийти и пользуясь описанными ниже средствами.

Остановимся на теоремах 3 и 4, относящихся к функциям класса II. Для этих функций имеем (см. [16], п. 1)

$$\rho_0(x) \log x \leqslant h(x) < (\log x)^2, \tag{10.2}$$

причем

$$h(x) = M(x) \log x = N(\log x) \log x, \tag{10.3}$$

где

$$N'(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty. \tag{10.4}$$

Положим

$$\Lambda(n) = \sqrt{M(n)}\sqrt{\log n}. \tag{10.5}$$

Если зоны $[0, \Lambda(n), \rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ являются з. р. л. н. п. (разумеется, речь идет о величинах $X_j \in (d)$ или з. н. п., то должно быть выполнено (0.1). Это доказывается так же, как соответствующее утверждение в п. 2. Перейдем теперь к доказательству достаточности условия (0.1) для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)/\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)/\rho(n), 0]$ были бы з. р. л. н. п.

Пусть $\mu > 0$ положительное число, которое будет фиксировано далее $X_j \in (d)$, имеем:

$$p_{z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} (\varphi(t))^n \exp(-itx\sqrt{n})\, dt + B\exp(-c_8 n^{1-2\mu}). \quad (10.$$

Следуя п. 4, займемся оценкой

$$\varphi^{(q)}(t) = B\int_1^\infty x^q \exp(-h(x))\, dx = B\int_1^\infty \exp(q\log x - h(x))\, dx. \quad (10.$$

Пусть $Q(q)$ решение уравнения:

$$h(x) = q + 4\log x, \text{ т. е. } M(x) = q + 4. \quad (10.$$

Тогда

$$\int_{Q(q)}^\infty \exp(q\log x - h(x))\, dx = B\int_{Q(q)}^\infty \frac{dx}{x^4} = B, \quad (10.$$

$$\int_1^\infty \exp(q\log x - h(x))\, dx = BQ(q)\exp(q\log Q(q)) = B\exp((q+1)\log\varphi(q)). \quad (10.10)$$

Будем пользоваться этой грубой оценкой для $\varphi^{(q)}(t)$, достаточной для наших целей. Из (10.8) находим

$$Q(q) = M^{-1}(q+4), \quad (10.11)$$

так что (10.10) дает:

$$\varphi^{(q)}(t) = B\exp(q+1)\log M^{-1}(q+4). \quad (10.12)$$

Следуя п. 4, находим отсюда:

$$K^{(q)}(0) = B\exp(q+1)\log M^{-1}(q+4), \quad (10.13)$$

$$\sup_{|t|\leqslant n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t)\frac{t^m}{m!}\right| = B\exp(\log M^{-1}(m+4) - \mu m\log n). \quad (10.14)$$

11. Теперь выберем μ согласно условию:

$$n^{1-2\mu} = (\Lambda(n))^2 = M(n)\log n. \quad (11.1)$$

Таким образом,

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{X(n)}{\log n} + \frac{B}{\log n}; \quad X(n) = \log\Lambda(n) = O(\log\log n). \quad (11.2)$$

Пусть $\tau = 10^{-6}$. Выберем m под условием:

$$\log M^{-1}(m+4) = \frac{\tau\mu\log n}{2} + B. \quad (11.3)$$

Тогда, в силу (10.4)

$$m + 4 = M(n^{\frac{\tau\mu}{2}}) = N\left(\frac{\tau\mu}{2}\log n\right) \asymp N(\log n) = M(n). \quad (11.4)$$

Теперь из формулы (10.14) получаем, согласно (11.4), (11.2)

$$\sup_{|t|\leqslant n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t)\frac{t^m}{m!}\right| = B\exp\left(-\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right)\log n + B\right)m =$$

$$= B\exp(-c_8 M(n)\log n) = B\exp(-c_8(\Lambda(n))^2). \tag{11.5}$$

аким образом, имеем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} + nK_3(t) - it\sqrt{n}x\right)dt + B\exp(-c_8(\Lambda(n))^2), \tag{11.6}$$

$$K_3(t) = \sum_{r=3}^{m} \psi_r \frac{t^r}{r!}. \tag{11.7}$$

ам нужно теперь заняться целой функцией $\exp nK_3(t)$. Положим:

$$\mu_1 = 0{,}99\ \mu, \tag{11.8}$$

оценим $nK_3(t)$ при $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$. Для $r \leqslant c_3$ имеем $\psi_r = B$ и

$$n\sum_{3\leqslant r\leqslant c_3} \frac{t^r}{r!}\psi_r = B\frac{n}{n^{3\mu_1}} = O(1). \tag{11.9}$$

алее, при $c_3 < r \leqslant m$ имеем, в силу (10.13),

$$\frac{\psi_r t^r}{r!} = B\exp((r+1)\log M^{-1}(r+4) - \mu_1 r\log n - 2\log r) =$$

$$= B\exp\left(-r\frac{\mu_1\log n}{10}\right) = Bn^{-\frac{2\mu_1}{10}}. \tag{11.10}$$

Из (11.9) и (11.10) при $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$ выводим:

$$nK_3(t) = B \tag{11.11}$$

отсюда, с помощью интеграла Коши (см. 7.2)

$$\chi_r = Br!\, n^{r\mu_1}. \tag{11.12}$$

При $r \geqslant m$, $|t| \leqslant m^{-\mu_1}$ из (11.10) находим:

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{\chi_r t^r}{2!} = B\exp(-0{,}005\, m\log n) =$$

$$= B\exp(-c_9 M(n)\log n) = B\exp(-c_9(\Lambda(n))^2). \tag{11.13}$$

12. Отсюда:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} - itx\sqrt{n}\right)\left(1 + \sum_{r=3}^{m}\frac{\chi_r}{r!}t^r\right)dt +$$

$$+ B\exp(-c_{10}(\Lambda(n))^2). \tag{12.1}$$

Делаем подстановку $\xi = t\sqrt{n}$:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n^{1/2-\mu}}^{n^{1/2-\mu}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right)\left(1 + \sum_{r=3}^{m}\frac{\chi_r}{r!}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^2\right)d\xi +$$

$$+ B\exp(-c_{10}(\Lambda(n))^2). \tag{12.2}$$

При данном $r \leqslant m$ рассмотрим

$$\frac{\chi_r}{r!\,(\sqrt{n})^r} \int_{n^{1/2-\mu}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \xi^2 d\xi = B^r \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-\left(\frac{1}{2}-\mu_1\right)r} \exp\left(-\frac{1}{4}\, n^{1-2\mu}\right). \quad (12.3$$

Выделяя множитель $\exp\left(-\frac{1}{4}\, n^{1-2\mu}\right)$, оценим второй множитель в (12.3

Учитывая (11.4), имеем:

$$B^r \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-\left(\frac{1}{2}-\mu_1\right)r} = B \exp r \left(B + \frac{\log r}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \log n\right), \quad (12.4$$

$$\log r - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \log n \leqslant \frac{1}{2} \log m - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \log n \leqslant -\frac{1}{4} \log n. \quad (12.5$$

Поэтому (12.3) имеет оценку $Bn^{-r/4}$, и сумма по $r > c_3$ дает (1). Далее $n^{1-2\mu} = (\Lambda(n))^2$, так что из (12.2) находим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right) \left(1 + \sum_{r=3}^{m} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r d\xi + \right.$$

$$\left. + B \exp\left(-c_{10} (\Lambda(n))^2\right); \right. \quad (12.6$$

из (12.6) выделяется член $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$; здесь

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{n^{1/2-\mu}}{\rho_7(n)} = \frac{\Lambda(n)}{\rho_7(n)}. \quad (12.7$$

При $3 \leqslant r \leqslant c_3$ сумма соответствующих членов будет равна

$$o(1)\, e^{-x^2/2}. \quad (12.8$$

При $c_3 < r \leqslant m$, следуя п. 8, приходим к рассмотрению выражения:

$$r\,(B - (1 - 2\rho) \log \rho_7(n) + \rho \log r - \rho\,(1 - 2\mu) \log n - (\mu - \mu_1) \log n). \quad (12.9$$

Здесь $\log r \leqslant \log m = B \log \log n$ (см. (11.4)). Ввиду этого (12.9) дает оценку

$$Bn^{-r(\mu-\mu_1)}. \quad (12.10$$

Суммирование по $c_3 \leqslant r \leqslant m$ дает погрешность

$$\frac{B}{n^2}; \quad (12.11$$

после чего из (12.6) следует:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\,(1 + o(1)). \quad (12.12$$

Аналогично трактуется зона $[-\Lambda(n)/\rho_7(n),\ 0]$.

13. Интегральная теорема доказывается, совершенно так же, как в п. 9; здесь достаточно грубых оценок, выведенных в пп. 10—12. Также существенно (см. п. 9), что $(\Lambda(n))^2 = M(n) \log n \geqslant \rho_0(n) \log n$ (см. 10.2). Ввиду этого

$$n^{h+1} \exp\left(-c_{11} (\Lambda(n))^2\right) = \exp\left(-c_{12} (\Lambda(n))^2\right) \quad (13.1$$

(см. [16]; ф-ла (12.5)) и мы можем рассуждать далее, как в п. 9.

Поступила в редакцию
28.6.60

ЛИТЕРАТУРА

Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.

H. Chernoff, Large sample theory: parametric case, Ann. Math. Stat., **27** (1956), 1—22.

J. Wolfowitz, Information theory for mathematicians, Ann. Math. Stat., **29** (1958), 351—356.

Ю. В. Линник, Цепи Маркова в аналитической арифметике кватернионов и матриц, Вестник ЛГУ, 13 (1956), 63—68.

Ю. В. Линник, Пять лекций о некоторых вопросах теории чисел и теории вероятностей, Тр. Матем. ин-та АН Венгрии.

А. Я. Хинчин, Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann., **101** (1929), 745—752.

Н. В. Смирнов, О вероятностях больших уклонений, Матем. сб., 40 (1933), 443—454.

H. Cramér, Sur un nouveau théorème — limite de la theorie des probabilités, Actual sci. et ind., Paris, 736 (1938).

В. В. Петров, Обобщение предельной теоремы Крамера, УМН, **9**, 4 (1954), 196—202.

В. Рихтер, Локальная предельная теорема для больших уклонений, ДАН СССР, **115**, 1 (1957), 53—56.

В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., **II**, 2 (1957), 214—229.

В. Рихтер, Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений. Теория вероят. и ее примен., **III**, 1 (1958), 107—114.

Yu. V. Linnik, On the probability of large deviations for the sums of independent variables. Transactions of the IV Berkeley Symposium on Prob. and Stat., 1961.

S. Bochner, K. Chandresekharan, Fourier Transforms, Princeton, 1949.

A. Erdelyi, Higher Transcendental Functions, **II**, 4 (1953).

Ю. В. Линник, Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. I, Теория вероят. и ее примен., **VI**, 2 (1961), 145—162.

LIMIT THEOREMS FOR THE SUMS OF INDEPENDENT VARIABLES TAKING INTO ACCOUNT THE BIG DEVIATIONS. II

YU. V. LINNIK (*LENINGRAD*)

(*Summary*)

II. «Narrow» zones of local and integral normal attraction. Using the notation in ection I of this article, we consider the integral normal attraction zones for the variabs X_j and local normal attraction zones for $X_j \in (d)$. The monotonic function $h(x) \leqslant x^{1/2}$ considered under the supplementary conditions explained in section I; the «narrow zone heorems» are more conveniently expressed in terms of the condition:

$$E \exp h(|X_j|) < \infty. \qquad (*)$$

he equation

$$h(\sqrt{n}\,\Lambda(n)) = (\Lambda(n))^2$$

etermines the monotonic function $\Lambda(n)$. The cordition (*) is necessary for the zones $\Lambda(n)\rho(n)]$, $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ to be z. n. a., and for $X_j \in (d)$ to be z. l. n. u. a. It is sufficient for he zones $\left[0, \frac{\Lambda(n)}{\rho(n)}\right]$; $\left[-\frac{\Lambda(n)}{\rho(n)}, 0\right]$ to be z. n. a. and for $X_j \in (d)$ — to be z. l. n. u. a.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск
1961

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА БИКОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Б. М. КЛОСС

Настоящая статья является продолжением [7] и посвящена изучени вероятностных распределений на бикомпактных абелевых группах. О стр ктуре таких групп известно гораздо больше, да и исследование предельны закономерностей при суммировании независимых случайных величин на ни значительно облегчается, благодаря возможности использования методо гармонического анализа, построенного для коммутативных групп.

Для упомянутых групп мы решаем некоторые классические задачи те рии вероятностей, как-то: определение свойств и вывод канонического пре ставления безгранично делимых законов распределения; предельная теорем для схемы серий и другие предельные теоремы.

Если μ и ν — вероятностные меры, то через $\mu\nu$ обозначается мера, полу чающаяся свертыванием мер μ и ν. Меру, сосредоточенную в элементе группы, мы будем обозначать тем же символом. Совокупность всех вероя ностных распределений на бикомпактной группе G образует бикомпактну полугруппу $S(G)$. Если μ есть элемент полугруппы $S(G)$, а e_0 — идемпотен из той же полугруппы, то говорят, что μ *принадлежит к идемпотенту* e если e_0 содержится в замыкании множества $\{\mu, \mu^2, \ldots\}$. Мы сохраняем другие определения и обозначения работы [7].

§ 1. Распределения на абелевых группах и их характеристические функци

1.1. Характеристические функции. Пусть G есть бикомпактная абеле группа. Для понимания излагаемого материала необходимо знание теори характеров таких групп. Под характером понимается непрерывное гомоморф ное отображение группы G в единичный круг комплексной плоскости. Вс характеры образуют группу, которую будем обозначать через $X(G)$. Таки образом, характер $\chi \in X(G)$ — непрерывная функция на G, такая, что

$$\chi(xy) = \chi(x)\cdot\chi(y), \quad x, y \in G$$

и

$$|\chi(x)| = 1.$$

Установленное, таким образом, соответствие между группами G и $X($ оказывается взаимным: G естественным образом можно рассматривать ка группу характеров группы $X(G)$ (см. [9]).

Пусть теперь $\mu \in S(G)$ есть распределение вероятностей на G. *Характ ристической функцией* закона распределения μ назовем преобразован

урье меры μ:

$$\Phi_\mu(\chi) = \int_G \chi(x)\, d\mu(x), \quad \chi \in X(G). \tag{1}$$

Отметим важнейшие свойства характеристических функций. Как будет дно ниже, они аналогичны свойствам характеристических функций законов спределения, определенных на обычной числовой прямой.

1.1.1. Из теории абстрактного гармонического анализа известно (см., на-имер, примечания редактора в [12]), что соответствие между законом спределения и его характеристической функцией взимно однозначно.

1.1.2. Известно также, что для того чтобы последовательность законов спределения на группе G

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

одилась к некоторому предельному закону μ, необходимо и достаточно, обы при $n \to \infty$

$$\lim \Phi_{\mu_n}(\chi) = \Phi_\mu(\chi)$$

вномерно на любом компакте. Заметим, что так как двойственная группа бикомпактной группе G дискретна, то компактными множествами являются ожества, состоящие из конечного числа элементов.

1.1.3. Легко проверяется также *теорема умножения*:

$$\Phi_{\mu\nu}(\chi) = \Phi_\mu(\chi) \cdot \Phi_\nu(\chi).$$

1.1.4. Значения характеристической функции, очевидно, по модулю не евосходят единицы.

1.2. Устойчивые законы. Пусть H — подгруппа G. Множество всех ха-ктеров $\chi \in X(G)$, удовлетворяющих условию $\chi(x) = 1$ при произвольном $\in H$, очевидно, есть подгруппа группы $X(G)$. Она называется *аннулятором* дгруппы H и обозначается как (X, H).

Через $\omega(\mu)$ будем обозначать *носитель* меры $\mu \in S(G)$ (см. [7]).

Лемма 1. *Для того чтобы* $\Phi_\mu(\chi) = 1$, *необходимо и достаточно, обы* χ *принадлежал аннулятору подгруппы* G, *порождённой* $\omega(\mu)$.

Доказательство. Равенство

$$\Phi_\mu(\chi) = \int \chi(x)\, d\mu(x) = \int_{\omega(\mu)} \chi(x)\, d\mu(x) = 1$$

ает место, очевидно, тогда и только тогда, когда $\chi(x) \equiv 1$ на $\omega(\mu)$. Но к как характер является гомоморфизмом, то $\chi(x) \equiv 1$ и на всей подгруппе, рожденной $\omega(\mu)$. Это и означает как раз, что χ пранадлежит аннулятору ой подгруппы.

В работе [7] мы определили, что закон распределения μ является *устой-вым*, если $\mu^2 = \mu$. Какова характеристическая функция устойчивого закона? з теоремы умножения следует, что

$$[\Phi_\mu(\chi)]^2 = \Phi_\mu(\chi).$$

оэтому при любом χ либо $\Phi_\mu(\chi) = 1$, либо $\Phi_\mu(\chi) = 0$. Носитель $\omega(\mu)$ тойчивого закона μ представляет собой подгруппу G. Принимая во внима-

ние лемму 1, получаем, что

$$\Phi_\mu(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi \in (X, \omega(\mu)), \\ 0, & \text{если } \chi \overline{\in} (X, \omega(\mu)). \end{cases}$$

1.3. *H*-равномерные законы. Пусть H — подгруппа G (под подгрупп мы везде в данной работе понимаем замкнутую подгруппу). Назовем зак распределения μ *H-равномерным*, если мера μ инвариантна на любом клас смежности G по подгруппе H. Закон распределения μ называется *стро H-равномерным*, если он является H-равномерным и не является $\mathfrak{H}$-равн мерным ни для какой подгруппы $\mathfrak{H}$, содержащей H и отличной от H.

Понятие H-равномерности ввел Н. Н. Воробьев при рассмотрении сл чайных величин на конечных абелевых группах (см. [11]). Приведенн выше определение является очевидным обобщением этого понятия.

Элементарным примером H-равномерного закона является инвариантн мера подгруппы H или та же мера, сдвинутая на смежный класс по по группе H. В частности, G-равномерным, а также и строго G-равномерны законом является инвариантная мера Хаара группы G.

1.3.1. Теорема 1. *Для того чтобы закон* μ *был H-равномерным, необх димо и достаточно, чтобы область ненулевых значений* $\Phi_\mu(\chi)$ *содерж лась в* (X, H).

Доказательство. Необходимость. Пусть μ является H-ра номерным законом. Это значит, что мера μ инвариантна на любом клас смежности G по подгруппе H, т. е.

$$\mu h = \mu \qquad (3$$

для любого $h \in H$. Докажем, что для каждого $\chi \overline{\in} (X, H)$ будет $\Phi_\mu(\chi)$ = В самом деле, допустим, что для некоторого $\chi_0 \overline{\in} (X, H)$ имеем $\Phi_\mu(\chi_0) \neq$ Но из (3) следует, что

$$\chi_0(h) \cdot \Phi_\mu(\chi_0) = \Phi_\mu(\chi_0)$$

для любого $h \in H$. Отсюда $\chi_0(h) = 1$ на H, т. е. $\chi_0 \in (X, H)$. А это пр тиворечит предположению.

Достаточность. Пусть ненулевые значения $\Phi_\mu(\chi)$ содержат в (X, H). Тогда, если e_0 есть инвариантная мера на подгруппе H, то (см. (2

$$\Phi_\mu(\chi) \cdot \Phi_{e_0}(\chi) = \Phi_\mu(\chi).$$

Из этого соотношения следует, что

$$\mu e_0 = \mu. \qquad (4$$

Тогда для $h \in H$ имеем

$$\mu h = \mu e_0 h = \mu e_0 = \mu.$$

А это значит, что мера μ инвариантна на любом классе смежности G подгруппе H, что и требовалось доказать.

Замечание. Как легко видеть, соотношение (4) есть характеристич ское свойство, что закон μ H-равномерен, где e_0 — инвариантная ме с $\omega(e_0) = H$.

Так же, как и в [11], доказывается

Следствие. *Для того чтобы закон* μ *был строго* H*-равномерным, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа* $X(G)$*, порожденная областью ненулевых значений* $\Phi_\mu(\chi)$*, была равна* (X, H).

1.3.2. *Если закон* μ *является* H*-равномерным, то найдется такая подгруппа* $\mathfrak{H}$*, что* μ *будет строго* $\mathfrak{H}$*-равномерным законом.* Действительно, пусть $\{H_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ есть совокупность подгрупп группы G, по которым закон μ равномерен (сюда, естественно, входит и упоминавшаяся подгруппа H). Инвариантные меры, сосредоточенные на этих подгруппах, обозначим теми же индексами — e_α. Идемпотенты e_α, $\alpha \in \Lambda$ образуют замкнутую подполугруппу $S(G)$, так как это множество определяется соотношениями

$$e_\alpha \mu = \mu, \quad e_\alpha^2 = e_\alpha.$$

Но во всякой бикомпактной коммутативной полугруппе существует примитивный идемпотент (см. [7]). Значит, таковой будет существовать и в построенной полугруппе. Обозначим его через e_0. Для него будет выполняться

$$e_0 \mu = \mu, \quad e_0 e_\alpha = e_0, \quad \alpha \in \Lambda.$$

Поэтому, если обозначить $\mathfrak{H} = \omega(e_0)$, то закон μ будет строго $\mathfrak{H}$-равномерным.

1.4. Меры на фактор-группах. Пусть H — подгруппа G. Рассмотрим естественное гомоморфное отображение π группы G на ее фактор-группу $G' = G/H$. При этом каждая мера μ индуцирует на G' новую меру μ', определяемую как

$$\mu'(E') = \mu[\pi^{-1}(E')], \quad E' \subset G'.$$

Получившийся закон распределения μ' будем обозначать μ/H и называть законом, *индуцированным* μ на фактор-группе G/H.

1.4.1. При $\chi \in (X, H)$ положим $\chi(x') = \chi(x)$, где $x \in x' \in G'$. Легко убедиться в том, что значение $\chi(x')$ не зависит от выбора элемента x в смежном классе x', т. е. $\chi(x)$ постоянно на смежном классе x'. Оказывается, что определенное таким образом отображение χ группы G/H в группу комплексных чисел, равных по модулю единице, есть характер группы G/H и что (X, H) есть в этом смысле группа характеров группы G/H (см. [9] или [12]).

1.4.2. Лемма 2. *Если область ненулевых значений характеристической функции* Φ_μ *является аннулятором подгруппы* H *группы* G*, то* $\Phi_{\mu/H}$ *не обращается в нуль.*

Доказательство. Группой характеров для $G' = G/H$ является (X, H). Тогда для $\chi \in (X, H)$ и $x \in x' \in G'$ имеем

$$\Phi_{\mu/H}(\chi) = \int\limits_{G'} \chi(x')\, d\mu'(x') = \int\limits_{G} \chi(x)\, d\mu(x) = \Phi_\mu(\chi) \neq 0.$$

1.4.3. Сопоставляя каждому закону $\mu \in S(G)$ индуцированный им закон μ/H, получаем отображение $S(G)$ на $S(G/H)$. Оказывается, это отображение является гомоморфизмом.

Лемма 3. *Для любого измеримого множества* $E' \subset G' = G/H$

$$[(\mu_1/H) \cdot (\mu_2/H)](E') = [\mu_1 \mu_2/H](E').$$

Доказательство. Искомое соотношение является очевидным следствием соотношения (4.4) работы [7].

§ 2. Безгранично делимые распределения и их свойства

2.1. Определение и простейшие свойства. Будем говорить, что закон распределения $\mu \in S(G)$ обладает корнем степени n, если существует такой закон $\nu \in S(G)$, что $\nu^n = \mu$. Закон распределения $\mu \in S(G)$ называется *безгранично делимым*, если у него существует корень любой степени (имеется ввиду целая положительная степень). Множество всех безгранично делимых законов распределения на группе G обозначим $\mathfrak{B}(G)$.

Очевидным примером безгранично делимого распределения являются устойчивые законы. Другой пример — закон распределения, характеристическая функция которого задается формулой

$$\Phi_\mu(\chi) = \exp\{a(\chi(g) - 1)\},$$

где постоянная $a > 0$, а g — фиксированный момент из G. Назовем такой закон распределения *законом Пуассона*. Случайная величина ξ, распределенная по закону Пуассона, имеет своими возможными значениями элемент g^k. Если циклическая группа $\{g^k\}$ бесконечна, то ξ принимает значение g^k с вероятностью $\frac{a^k}{k!}e^{-a}$. Если же группа $\{g^k\}$ имеет конечный порядок r, то значение g^k величина ξ принимает с вероятностью $e^{-a}\sum\frac{a^n}{n!}$, где сумма распространяется по неотрицательным n, сравнимым с k по модулю r.

Очевидно, закон Пуассона безгранично делим. При любом n он является композицией n законов Пуассона, характеристические функции которых задаются формулами

$$\Phi_n(\chi) = \exp\left\{\frac{a}{n}(\chi(g) - 1)\right\}.$$

2.1.1. Лемма 4. *Множество законов распределения, у которых существует корень степени n, замкнуто в $S(G)$.*

Доказательство. Обозначим множество всех законов, у которых существует корень степени n, через D_n. Пусть $\mu \in \overline{D}_n$. Докажем, что μ также обладает корнем степени n.

Пусть $\{U_\tau,\ \tau \in T\}$ есть полная система окрестностей элемента μ. Обозначим $B_\tau = U_\tau \cap D_n$. Каждый элемент $\nu \in D_n$ можно, по условию, представить в виде $\nu = (\nu^{(n)})^n$. Сопоставим, таким образом, каждому $\nu \in D_n$ фиксированное $\nu^{(n)}$; при этом множествам B_τ будут соответствовать некоторые множества $B_\tau^{(n)}$. Система замкнутых множеств $\overline{B}_\tau^{(n)}$ обладает свойством конечного пересечения и поэтому пересечение $\bigcap_{\tau\in T}\overline{B}_\tau^{(n)}$ непусто. Возьмем какой-нибудь элемент λ из этого пересечения. Докажем, что $\lambda^n = \mu$. Действительно, если бы это было не так, т. е. $\lambda^n \neq \mu$, то у элементов λ^n и μ нашлись бы непересекающиеся окрестности $U(\lambda^n)$ и U_{τ_0}, $\tau_0 \in T$. Из непрерывности операции умножения следует, что найдется такая окрестность $U(\lambda)$ элемента λ, что

$$[U(\lambda)]^n \subset U(\lambda^n).$$

о так как $\lambda \in \overline{B}_{\tau_0}^{(n)}$, то найдется элемент $\nu^{(n)} \in B_{\tau_0}^{(n)}$, входящий в $U(\lambda)$. огда элемент $\nu \in U(\lambda^n)$, в то время, как он должен входить в U_{τ_0} — по- учили противоречие.

Следствие. *Множество* $\mathfrak{B}(G)$ *замкнуто в* $S(G)$.

Действительно, множество $\mathfrak{B}(G)$ получается как пересечение замкнутых ножеств D_n законов распределения, обладающих корнем степени n, $= 1, 2, \ldots$. В силу бикомпактности топологического пространства $S(G)$ го пересечение непусто и представляет замкнутое множество.

2.1.2. *Свертка конечного числа безгранично делимых законов является безгранично делимым законом.* Это следует из того, что в силу коммута- ивности группы G полугруппа $S(G)$ тоже коммутативна.

2.1.3. Если $\mu \in \mathfrak{B}(G)$, то, как следует из леммы 3, для любой замкну- ой подгруппы H группы G будет

$$\mu/H \in \mathfrak{B}(G/H).$$

Таким образом, каждый безгранично делимый закон индуцирует на актор-группе опять же безгранично делимый закон. Покажем, что этим пособом получаются все безгранично делимые распределения на фактор- руппах.

Лемма 5. *Отображение* $\mu \to \mu/H$ *является гомоморфным отображе- ием* $\mathfrak{B}(G)$ *на* $\mathfrak{B}(G/H)$.

Доказательство. Пусть $\nu \in \mathfrak{B}(G/H)$. Рассмотрим множество T мер $\in S(G)$ таких, что $\mu/H = \nu$. Пусть e_0 есть такой идемпотентный элемент $S(G)$, что $\omega(e_0) = H$. Тогда (см. [13], теорема 3) $S(G/H)$ изоморфна $(G) \cdot e_0$. Отсюда заключаем, что множество T должно быть замкнутым, ак как оно удовлетворяет соотношению

$$Te_0 = \nu.$$

Среди элементов множества T существуют такие, которые обладают орнем n-ой степени. Действительно, пусть $\nu^{(n)}$ — корень степени n из ν. Найдется тогда такой элемент $\lambda \in S(G)$, что $\lambda/H = \nu^{(n)}$. Тогда $\nu = (\lambda/H)^n = = \lambda^n/H$, т. е. $\lambda^n \in T$.

Множество элементов из T, имеющих корень n-ой степени, обозначим ерез T_n. Каждое множество T_n замкнуто, так как является пересечением амкнутых множеств D_n (из леммы 4) и T. Замкнутые множества T_n обла- ают свойством конечного пересечения. В самом деле, пусть дана конечная овокупность множеств $T_{n_1}, T_{n_2}, \ldots, T_{n_k}$. Множество $T_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ содержится каждом из этих множеств и поэтому содержится и в их пересечении. Итак, замкнутые подмножества T_n бикомпактного пространства обладают войством конечного пересечения, поэтому пересечение всех этих множеств $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ непусто. Если взять какой-нибудь элемент μ из этого пересечения, о μ оказывается безгранично делимым законом и $\mu/H = \nu$, что и требова- ось доказать.

2.1.4. Корни из безгранично делимого закона, вообще говоря, определя- ются неоднозначно и сами могут быть не безгранично делимыми. Вместе тем справедлива следующая

Лемма 6. *Пусть закон распределения* μ *безгранично делим. Тогда сре всех его корней степени* n *найдется хотя бы один безгранично делимы*

Доказательство. Легко видеть, что множество всех корней ст пени n из μ есть замкнутое множество.

Допустим, что среди элементов этого множества нет ни одного безгр нично делимого, т. е. для каждого ν — корня n-ой степени из μ — найдет хотя бы одно число n_ν, для которого не существует корень из ν. Так ка множество всех законов, у которых существует корень степени n_ν, замкнут то элемент ν отделяется от этого множества некоторой окрестностью $U(\nu$

Для каждого элемента нашего множества корней строим подобну окрестность. Система этих окрестностей покрывает бикомпактное множеств корней, поэтому можно выбрать конечное покрытие, состоящее из некоторы окрестностей $U(\nu_1), \ldots, U(\nu_m)$. Обозначим тогда

$$M = n_{\nu_1} n_{\nu_2} \ldots n_{\nu_m} n.$$

Так как μ есть безгранично делимый закон, то найдется элемент λ тако что $\lambda^M = \mu$. Тогда элемент $\lambda^{n_{\nu_1} \ldots n_{\nu_m}}$ есть корень степени n из μ, и в т же время у него существуют корни степени $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_m}$ — это проти воречие и доказывает лемму.

2.2. Продолжение «рациональной» полугруппы. Пусть $\mu \in S(G)$ — безгра нично делимый закон распределения. Построим последовательность безгра нично делимых законов распределения

$$\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, \ldots,$$

таким образом, чтобы $(\mu_2)^2 = \mu$, $(\mu_3)^3 = \mu_2$ и т. д. Как легко видет $(\mu_k)^{k!} = \mu$. Положим для каждого рационального числа $t = p/q$

$$\mu_t = (\mu_k)^{\frac{p}{q} k!} \quad \text{при } k \geqslant q.$$

Очевидно, μ_t не зависит от выбора k и $\mu_1 = \mu$. При этом

$$\mu_{t_1} \cdot \mu_{t_2} = \mu_{t_1 + t_2}.$$

Таким образом, через безгранично делимую меру $\mu \in S(G)$ мы провел полугруппу μ_t, зависящую от рационального параметра t. При этом, ка было уже отмечено, сама мера μ получается при $t = 1$.

Исследуем вопрос о предельном поведении мер μ_t, когда рациональны параметр t стремится к нулю. Получившееся множество предельных точе обозначим через E, т. е.

$$E = \{\nu : \nu = \lim \mu_{t_i} \text{ при } t_i \to 0\}.$$

Легко видеть, что множество E замкнуто и является полугруппой Заметим также, что каждый элемент из полугруппы E безгранично делим Поскольку каждая бикомпактная полугруппа содержит идемпотент (см. по этому поводу [7], § 2), то и в E существует некоторый идемпотент e_0 Следовательно, найдется такая последовательность $\{s_i\}$ рациональных чисел стремящаяся к нулю, что $e_0 = \lim \mu_{s_i}$ при $i \to \infty$.Характеристическая функ ция закона μ_{s_i} есть, очевидно,

$$\Phi_{\mu_{s_i}}(\chi) = [\Phi_\mu(\chi)]^{s_i}.$$

оэтому, когда $\Phi_\mu(\chi) = 0$, то $\Phi_{e_0}(\chi) = 0$, а если $\Phi_\mu(\chi) \neq 0$, то $\Phi_{e_0}(\chi) = 1$ отому что значения характеристической функции устойчивого закона равны ибо 0, либо 1). Отсюда видно, что характеристические функции законов , и μ имеют одни и те же нули, и устойчивый закон e_0 определяется по акону распределения μ однозначно. Отсюда, в частности, следует, что бикомпактная полугруппа E содержит только один идемпотент. Из безгранич-ой делимости элементов E можно заключить, что $E^2 = E$. Тогда, по тео-еме Коха — Уоллеса [8], следует, что E есть группа. Полученные резуль-аты оформляет следующая

Теорема 2. *Каждый безгранично делимый закон распределения μ на икомпактной абелевой группе G является строго H_0-равномерным, где H_0 — некоторая подгруппа G. Более того, если e_0 — инвариантная мера а H_0, то характеристические функции законов μ и e_0 имеют одни и те се нули (т. е. характеристическая функция безгранично делимого закона отлична от нуля ровно на аннуляторе подгруппы H_0).*

2.2.1. Раз характеристическая функция безгранично делимого закона μ тлична от нуля ровно на аннуляторе подгруппы $H_0 = \omega(e_0)$, то из леммы следует, что закон μ/H_0 безгранично делим и его характеристическая ункция не обращается в нуль.

Поскольку закон μ/H_0 вместе с подгруппой H_0 однозначно определяет акон μ, то для изучения безгранично делимых законов на бикомпактных белевых группах достаточно рассмотреть безгранично делимые законы, арактеристические функции которых не обращаются в нуль.

2.3. Случай нульмерных групп. Продолжим рассуждения предыдущего ункта, предположив, что бикомпактная группа G имеет размерность нуль. Известно ([9], стр. 102), что группа G в этом случае вполне несвязна.

Мы получили, что всякую безгранично делимую меру $\mu \in S(G)$ можно ключить в «рациональную» полугруппу, а если параметр t стремится к нулю, о получающееся множество предельных точек E представляет собой икомпактную группу, содержащую некоторый идемпотент e_0. Исходя из . 2.2.1, мы будем предполагать, что характеристическая функция закона отлична от нуля. Тогда, очевидно, характеристическая функция e_0 равна ождественно единице, т. е. e_0 есть единичный закон. Таким образом, E редставляет собой множество точечных масс, сосредоточенных в элемен-ах группы G. Вспомним, что элементы E безгранично делимы, в то время ак элементы вполне несвязной группы этим свойством не обладают (см. 9], теорема 46). Следовательно, E состоит всего лишь из одного элемента $_0$ — точечной массы, сосредоточенной в единице группы G, и

$$\Phi_{\mu_{s_i}}(\chi) \to 1$$

ля любой последовательности рациональных чисел s_i, стремящейся к нулю. огда, по непрерывности, нашу «рациональную» полугруппу можно продол-кить и определить для всех действительных чисел $t > 0$, аппроксимируя $\Phi_\mu(\chi)]^t$ при иррациональном t функциями $[\Phi_\mu(\chi)]^{t_0}$, где t_0 — рациональные исла.

Теорема 3. *Каждый безгранично делимый закон распределения μ на ульмерной бикомпактной абелевой группе можно включить в непрерыв-ую однопараметрическую полугруппу мер μ_t, $t > 0$, так что $\mu_1 = \mu$.*

2.4. Случай групп Ли. Как известно, любая компактная абелева группа Ли представляется в виде прямой суммы конечной группы и тора некоторой конечной размерности. Мы перенесем теорему 3 на этот случай, но предварительно рассмотрим простейшую из таких групп — окружность.

2.4.1. Пусть G — окружность. В этом случае группа характеров G изоморфна группе целых чисел, а характеристическая функция закона распределения μ на G представляет собой последовательность коэффициентов Фурье

$$a_k = \int_G e^{ikx}\, d\mu(x),\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots .$$

Очевидно, всегда $a_0 = 1$. Пусть теперь закон распределения μ безгранично делим, а его первый коэффициент Фурье есть $a_1 = \rho e^{i\alpha}$. Если $\mu^{(n)}$ — безгранично делимый корень n-ой степени из μ, то его первый коэффициент Фурье есть

$$\sqrt[n]{\rho}\exp\left\{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\},$$

где k — некоторое целое число. Если взять теперь точечную массу, сосредоточенную в элементе $x' = \exp\left\{-i\dfrac{2k\pi}{n}\right\}$, то мера $\nu_n = \mu^{(n)}x'$ будет безгранично делимой (так как элемент x' безгранично делим) и является, очевидно, корнем степени n из μ. Но первый коэффициент Фурье этой меры уже будет

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\alpha}{n}}.$$

Итак, мы доказали, что если аргумент первого коэффициента Фурье безгранично делимого закона μ есть α, то среди корней степени n из μ существует такой, у которой аргумент первого коэффициента Фурье равен α/n. Такой корень (который, кстати, безгранично делим) назовем *каноническим*.

Если при построении «рациональной» полугруппы μ_t ограничиться каноническими корнями, то полученная полугруппа будет непрерывна в нуле. Действительно, выбирая сходящуюся последовательность μ_{t_i}, $t_i \to 0$, видим, что первые коэффициенты Фурье этих мер стремятся к единице. Следовательно, у предельной меры первый коэффициент Фурье равен единице. Из леммы 1 следует, что таким законом может быть только точечная масса, сосредоточенная в единице группы. Следовательно, полугруппа μ_t непрерывна в нуле и, таким образом, продолжается по непрерывности на все положительные действительные числа.

2.4.2. Если G — двумерный тор, то меры μ задаются коэффициентами Фурье

$$a_{nm} = \iint \exp\{i(nx+my)\}\, d\mu(x,y).$$

Замечаем, что если для точечной массы $a_{10} = a_{01} = 1$, то закон распределения единичный. Поэтому выбираем корни n-ой степени из μ таким образом, чтобы извлечение корней из коэффициентов a_{10} и a_{01} производилось каноническим способом. Проводя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что каждый безгранично делимый закон распределения μ и на n-мерном торе можно включить в непрерывную однопараметрическую полугруппу мер μ_t, $t > 0$, так что $\mu_1 = \mu$.

2.4.3. Осталось разобрать общий случай, когда G есть прямая сумма конечной группы и n-мерного тора. Для простоты ограничимся случаем, когда G есть прямая сумма окружности K и конечной группы Z. При извлечении корней из μ будем следить за тем, чтобы эта операция производилась каноническим способом для коэффициентов Фурье

$$a_{10} = \iint_{KZ} e^{ix} d\mu(x, y).$$

Если теперь $\nu = \lim_{t\to 0} \mu_{t_i}$ — предельная точечная масса, то для нее коэффициент Фурье типа a_{10} будет равен единице. Поэтому она целиком сосредоточена на подгруппе Z. Но безгранично делимой здесь может быть только масса, сосредоточенная в единице группы.

Мы предполагали, что характеристическая функция закона μ отлична от нуля. В противном случае будем рассуждать следующим образом. Из теоремы 2 следует, что мера μ строго H_0-равномерна, где H_0 — некоторая подгруппа G. Для индуцированной меры μ/H_0 характеристическая функция отлична от нуля, поэтому через нее можно провести однопараметрическую полугруппу. По лемме 5 ей соответствует совокупность мер μ_t на G. Если взять меры μ_t строго H_0-равномерными, то они определяются однозначно. Легко проверить, что меры μ_t образуют непрерывную полугруппу и $\lim_{t\to 0} \mu_t = e_0$, где e_0 — идемпотент, для которого $H_0 = \omega(e_0)$. В итоге доказана

Теорема 4. *Каждый безгранично делимый закон распределения μ на бикомпактной абелевой группе Ли можно включить в непрерывную однопараметрическую полугруппу мер μ_t, $t > 0$, так что $\mu_1 = \mu$.*

2.5. Общий случай. Когда бикомпактная абелева группа G не является группой Ли, то не через всякую безгранично делимую меру $\mu \in S(G)$ можно провести непрерывную однопараметрическую полугруппу. Рассмотрим, например, бикомпактную связную абелеву группу G конечной размерности n, не являющуюся группой Ли (см. книгу А. Вейля [12], стр. 105—107). В силу связности каждый элемент $x \in G$ безгранично делим. Если же через x можно провести непрерывную однопараметрическую полугруппу x_t, $t > 0$, то, полагая $x_{-t} = (x_t)^{-1}$, получаем, что если через любой элемент $x \in G$ можно провести непрерывную однопараметрическую полугруппу, то через любой элемент проходит также однопараметрическая подгруппа. Множество всех однопараметрических подгрупп $\{x_t\}$ в G образует n-мерное векторное пространство R^n, и отображение $x_t \to x_1 = x$ пространства R^n на G будет непрерывным (см. [4]). Но тогда G будет являться группой Ли, что противоречит нашему предположению.

Теперь мы выясним, как «велико» множество тех безгранично делимых законов распределения, через которые можно провести однопараметрические полугруппы. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть G — бикомпактная абелева группа и H — такая ее подгруппа, что G/H есть группа Ли. Если $\nu(t)$ — непрерывная однопараметрическая полугруппа мер в $\mathfrak{B}(G/H)$, то в $\mathfrak{B}(G)$ найдется такая непрерывная однопараметрическая полугруппа $\mu(t)$, что $\mu(t)/H = \nu(t)$.*

Доказательство. Установим сначала справедливость леммы в том случае, когда G сама является группой Ли. Пусть μ есть безгранично дели-

мая мера на G, такая, что $\mu/H = \nu(1)$. Существование меры μ следует
леммы 5. Так как через любую безгранично делимую меру на компактн
абелевой группе Ли можно провести непрерывную однопараметрическу
полугруппу, то существует, следовательно, такая полугруппа $\mu(t)$, $t >$
при этом $\mu = \mu(1)$. Тогда $\mu(t)/H = \nu(t)$. Действительно, эта непрерывн
однопараметрическая полугруппа проходит через меру $\nu = \nu(1)$, а известн
что через безгранично делимую меру ν на компактной абелевой группе J
можно провести только одну непрерывную однопараметрическую полугрупп
$\nu(t)$ таким образом, что $\nu = \nu(1)$ (подробно об этом см. следующ
параграф).

Теперь переходим к доказательству леммы в общем случае. Как извест
(см. [9], стр. 326), в каждой окрестности единицы бикомпактной групп
найдется нормальный делитель, фактор-группа по которому есть групп
Ли. Тогда через $\{H_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, обозначим совокупность подгрупп G, таки
что G/H_α есть группа Ли. Ограничимся случаем, когда все $H_\alpha \subset H$. Сам
подгруппу H также включим в эту систему и обозначим $H_1 = H$. Систем
индексов Λ можно частично упорядочить, полагая для $\alpha,\ \beta \in \Lambda$ $\alpha < \beta$, есл
$H_\alpha \supset H_\beta$. Известно, что если $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — подгруппы G, такие, чт
G/N_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, есть группа Ли, то для $N = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N$
фактор-группа G/N есть также группа Ли (см. [9], стр. 326). Отсюда м
заключаем, что множество индексов Λ является частично упорядоченны
направленным множеством. Для $\alpha \in \Lambda$ положим $G_\alpha = G/H_\alpha$. Если $\alpha < \beta$, т
гомоморфизм $\mathfrak{B}(G_\beta)$ на $\mathfrak{B}(G_\alpha)$ обозначим через φ_α^β, а гомоморфизм $\mathfrak{B}(G)$ н
$\mathfrak{B}(G_\alpha)$ — через φ_α.

Обозначим опять $\nu = \nu(1)$. Выберем закон $\mu \in \mathfrak{B}(G)$ так, чтобы $\varphi_1(\mu) = \nu$
На группах G_α мера μ индуцирует меры $\nu_\alpha = \varphi_\alpha(\mu)$, принадлежащие $\mathfrak{B}(G_\alpha$
Легко видеть, что для $\alpha < \beta$

$$\varphi_\alpha^\beta(\nu_\beta) = \nu_\alpha.$$

На каждой группе G_α через меру ν_α можно провести, по доказанному, един
ственную непрерывную однопараметрическую полугруппу $\nu_\alpha(t)$, так что
$\nu_\alpha = \nu_\alpha(1)$. При этом, очевидно, для $\alpha < \beta$

$$\varphi_\alpha^\beta(\nu_\beta(t)) = \nu_\alpha(t).$$

Обозначим через $X_\alpha(t)$ полный прообраз элемента $\nu_\alpha(t)$ при гомомор
физме φ_α. Множества $X_\alpha(t)$, $\alpha \in \Lambda$, бикомпактны. Нетрудно проверить, что
эти множества обладают свойством конечного пересечения. Поэтому пере
сечение их непусто и, более того, содержит лишь один элемент, поскольку
пересечение всех подгрупп H_α, $\alpha \in \Lambda$, содержит лишь единицу группы. Обо
значим этот элемент через $\mu(t)$. Тогда имеем, очевидно,

$$\varphi_\alpha(\mu(t)) = \nu_\alpha(t).$$

Покажем, что $\mu(t)$ есть однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{B}(G)$. Для
любых двух положительных чисел t_1 и t_2 имеем

$$\varphi_\alpha(\mu(t_1) \cdot \mu(t_2)) = \nu_\alpha(t_1) \cdot \nu_\alpha(t_2) = \nu_\alpha(t_1 + t_2).$$

Таким образом, $\mu(t_1) \cdot \mu(t_2) \in X_\alpha(t_1 + t_2)$ при произвольном $\alpha \in \Lambda$, и следова-

льно, $\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)=\mu(t_1+t_2)$. Непрерывность в нуле также очевидна, и ы получаем, что $\mu(t)$ — непрерывная однопараметрическая полугруппа $\mathfrak{B}(G)$, удовлетворяющая условию $\varphi_1(\mu(t))=\nu(t)$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{B}(G)$ — множество всех безгранично делимых законов распределения на бикомпактной абелевой группе G. Тогда безгранично делимые законы, через которые можно провести непрерывные однопараметрические полугруппы, образуют плотное подмножество $\mathfrak{B}(G)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{B}(G)$ — множество безгранично делимых законов, через которые можно провести однопараметрические полугруппы. Как уже говорилось при доказательстве предыдущей леммы, в любой окрестности единицы группы G существует нормальный делитель, фактор-группа по которому есть группа Ли. Пусть $\{H_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}$ — система таких подгрупп. Через e_α обозначим инвариантную меру на подгруппе H_α. Как мы говорили, $\mathfrak{B}(G/H_\alpha)$ изоморфна полугруппе $\mathfrak{B}(G)e_\alpha$. По только что доказанной лемме имеем: $\mathfrak{D}\cdot e_\alpha=\mathfrak{B}(G)\cdot e_\alpha$. По непрерывности это соотношение можно распространить и на замыкание множества $\mathfrak{D}$:

$$\overline{\mathfrak{D}}\cdot e_\alpha=\mathfrak{B}(G)\cdot e_\alpha.$$

Предположим теперь, что $\overline{\mathfrak{D}}$ не совпадает с $\mathfrak{B}(G)$. Возьмем тогда $\nu\in\mathfrak{B}(G)-\overline{\mathfrak{D}}$. Обозначим через T_α множество элементов из $\overline{\mathfrak{D}}$, для которого

$$T_\alpha\cdot e_\alpha=\nu\cdot e_\alpha.$$

Условимся опять для $\alpha,\ \beta\in\Lambda$ писать $\alpha<\beta$, если $H_\alpha\supset H_\beta$. Множества T_α замкнуты и для $\alpha<\beta$ будет $T_\alpha\supset T_\beta$. Действительно:

$$T_\beta\cdot e_\alpha=T_\beta e_\beta e_\alpha=\nu e_\beta e_\alpha=\nu e_\alpha.$$

Поэтому пересечение $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$ непусто. Возьмем какой-нибудь элемент μ из этого пересечения. Для него будут выполняться соотношения

$$\mu e_\alpha=\nu e_\alpha,\ \alpha\in\Lambda. \tag{5}$$

Так как единичный закон e является предельной точкой для множества $\{e_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}$, то соотношение (5) будет выполняться по непрерывности и для него:

$$\mu=\mu e=\nu e=\nu.$$

Но $\mu\in\overline{\mathfrak{D}}$, в то время как $\nu\overline{\in}\,\overline{\mathfrak{D}}$. Это приводит нас к противоречию, на основе которого мы заключаем, что $\overline{\mathfrak{D}}=\mathfrak{B}(G)$, что и требовалось доказать.

2.6. Процессы с независимыми приращениями. Пусть t есть непрерывный параметр (время), причем каждому $t\geqslant 0$ соответствует случайная величина $\xi(t)$, принимающая свои значения из бикомпактной абелевой группы G. Закон распределения величины $\xi(t)$ обозначим через μ_t. Мы скажем, что однопараметрическая совокупность случайных величин $\xi(t)$ образует *однородный процесс с независимыми приращениями* (или процесс со стационарными независимыми приращениями), если

$$\text{Вер. }\{\xi(s)^{-1}\cdot\xi(t)\in E\}=\mu_{t-s}(E)\ \text{ для }\ 0\leqslant s<t$$

и при $t_1<t_2<\ldots<t_n$ приращения

$$\xi(t_1)^{-1}\cdot\xi(t_2),\ \ldots,\ \xi(t_{n-1})^{-1}\cdot\xi(t_n)$$

независимы между собой. Для такого процесса, очевидно,

$$\mu_{t_1+t_2} = \mu_{t_1} \cdot \mu_{t_2},$$

т. е. меры μ_t образуют непрерывную однопараметрическую полугруппу. М можем считать, что $\xi(0)$ равно тождественно единице e группы G. Таки образом,

$$\mu_0 = e. \qquad (6$$

Если это условие не выполнено, то можно показать, что при $t \to 0$ мер μ_t сходится к μ, где μ — мера Хаара некоторой подгруппы G. Докажем эт предложение. Без ограничения общности можно считать, что группа G сепа рабельна. Выберем тогда последовательность чисел t_n, стремящуюся к нулю чтобы μ_{t_n} сходились к некоторой мере μ. Имеем тогда

$$\mu_t \cdot \mu = \lim_{n\to\infty} \mu_t \cdot \mu_{t_n} = \lim_{n\to\infty} \mu_{t+t_n} = \mu_t, \quad t > 0.$$

Если взять другую последовательность $t'_n \to 0$, при которой $\mu_{t'_n} \to \mu'$, то

$$\mu' \cdot \mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{t'_n} \cdot \mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{t'_n} = \mu',$$

и аналогично $\mu'\mu = \mu$, откуда $\mu' = \mu$. Следовательно, μ_t сходятся к μ при $t \to 0$. Очевидно также, что $\mu^2 = \mu$, поэтому μ — мера Хаара подгруппы $H = \omega(\mu)$. Если теперь рассмотреть процесс, индуцированный на фактор группе G/H, то для него уже будет выполняться условие (6).

Обозначим далее характеристическую функцию величины $\xi(t)$ через $\Phi_t(\chi)$. Из того, что

$$\Phi_{t_1+t_2}(\chi) = \Phi_{t_1}(\chi) \cdot \Phi_{t_2}(\chi),$$

следует, что $\Phi_{\frac{1}{n}}(\chi) = [\Phi_1(\chi)]^{\frac{1}{n}}$, а значит $\Phi_{\frac{m}{n}}(\chi) = [\Phi_1(\chi)]^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}$ — ра циональное число. По непрерывности этот результат распространяется на все значения параметра t:

$$\Phi_t(\chi) = [\Phi_1(\chi)]^t. \qquad (7$$

Но $\Phi_1(\chi)$ — характеристическая функция безгранично делимого закона μ_1. Поэтому, если мы найдем представление характеристической функции без гранично делимого закона распределения, то по формуле (7) найдется соот ветствующее представление характеристической функции однородного про цесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями. Поэтому следующий параграф посвящается выводу канонического представления характеристической функ ции безгранично делимого распределения на бикомпактной абелевой группе

§ 3. Каноническое представление безгранично делимых законов распределения

3.1. Предварительные замечания. Изучение однопараметрических полу групп было предпринято нами в предыдущем параграфе далеко неслучайно Возможность проведения через безгранично делимую меру непрерывной одно параметрической полугруппы тесно связана, как будет показано ниже, с выводом явного канонического представления таких законов.

Пусть G — бикомпактная абелева группа, а $\mu \in S(G)$ — безгранично дели-
ый закон распределения на ней. Предположим, что через μ можно про-
сти непрерывную однопараметрическую полугруппу μ_t, $t > 0$, так что
$= \mu$. Из результатов § 2 следует, что можно ограничиться случаем, когда
рактеристическая функция закона μ отлична от нуля. В этом случае меры
при $t \to 0$ сходятся к единице группы G. По мерам μ_t строим сильно
прерывную полугруппу ограниченных линейных преобразований T_t, $t > 0$,
нахова пространства $C(G)$ непрерывных на G функций, полагая

$$T_t f(x) = \int f(xy)\, d\mu_t(y), \quad f \in C(G).$$

Полугруппа T_t удовлетворяет, очевидно, соотношениям:

$$T_t f \to f \text{ при } t \to 0$$

$$\| T_t f \| \leqslant \| f \|.$$

акая полугруппа, по Хиллу, называется *сжимающей*.

Оператор $\mathfrak{A}$, определяемый как

$$\mathfrak{A} f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (T_t f - f),$$

азывается *инфинитезимальным оператором* полугруппы T_t. Он существует
а плотном линейном подмножестве $D(\mathfrak{A})$ пространства $C(G)$ (см. форму-
ировку теоремы Хилла — Иосида в [1]).

Для $f \in D(\mathfrak{A})$ имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt} T_t f = \mathfrak{A} T_t f,$$

раведливость которого вытекает из равенства

$$\frac{1}{s} (T_{s+t} - T_t) f = \mathfrak{A}_s T_t f,$$

де

$$\mathfrak{A}_s = \frac{1}{s} (T_s - E).$$

Обозначим $A\chi = \mathfrak{A}\chi(e)$, $\chi \in X(G)$. Так как

$$T_t \chi(x) = \chi(x) \cdot T_t \chi(e),$$

о

$$\frac{d}{dt} T_t \chi(e) = \mathfrak{A} T_t \chi(e) = A\chi \cdot T_t \chi(e).$$

Поэтому имеем

$$T_t \chi(e) = \exp(t \cdot A\chi).$$

Но $T_t \chi(e) = \int \chi(x)\, d\mu_t(x)$, значит,

$$\int \chi(x)\, d\mu_t(x) = \exp(t \cdot A\chi). \tag{8}$$

В левой части равенства (8) стоит как раз характеристическая функция
акона μ_t. При $t = 1$ получаем нашу меру μ. Следовательно, для получения
анонического представления характеристической функции безгранично дели-
ого закона μ необходимо вычислить функционал $A\chi$.

3.2. Вывод канонического представления для случая групп Ли. Пусть G — компактная абелева группа Ли. Если Y есть элемент алгебры Ли для G, то положим $\zeta(t) = \exp t \cdot Y$. Для функции $f \in C(G)$ определим дифференциальный оператор Yf равенством

$$Yf(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(x \cdot \zeta(t)) - f(x)], \qquad (9)$$

при условии, что этот предел существует в метрике $C(G)$. Пусть $C_2(G)$ есть множество функций $f \in C(G)$, для которых $Y_1 Y_2 f$ имеет смысл для любого набора Y_1 и Y_2 из алгебры Ли группы G. $C_2(G)$ является линейным многообразием, плотным в $C(G)$. Выберем фиксированный базис $X_1, \ldots, X_n$ алгебры Ли группы G. В [5] доказано существование функции $\psi(x)$ из $C_2(G)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\psi(e) = X_i \psi(e) = 0, \qquad (10)$$

$$X_i X_i \psi(e) = 2, \quad X_i X_j \psi(e) = 0, \text{ если } i \neq j,$$

и которая строго положительна на $G - \{e\}$. В координатах x_i, приведенных к базису $\{X_i\}$ в единице группы e, т. е. для которых $x_i(e) = 0$ и $X_i x_j(e) = \delta_{ij}$, функция $\psi(x)$ в окрестности e эквивалентна $\sum_i x_i^2$. В той же работе доказано, что если полугруппа T_t соответствует полугруппе мер μ_t, то ее инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A}$ определяется по крайней мере на $C_2(G)$ (причем сужение его на $C_2(G)$ полностью определяет полугруппу T_t) и имеет определенный вид (см. [5], теорема 5.1). Обратно, всякий оператор на $C_2(G)$ такого вида является сужением на $C_2(G)$ инфинитезимального оператора некоторой сжимающей полугруппы. Информацию о точном виде этого оператора в применении к нашему случаю дает следующая

Теорема 6. *Для того чтобы закон распределения μ на компактной абелевой группе Ли G с отличной от нуля характеристической функцией был безгранично делим, необходимо и достаточно, чтобы некоторое значение логарифма характеристической функции закона μ представлялось в виде*

$$\log \Phi_\mu(\chi) = i \sum_i a_i D_i \chi - \sum_{i,j} a_{ij} D_{ij} \chi + \int_{G - \{e\}} \left[\chi(x) - 1 - i \sum_i D_i \chi \cdot x_i(x) \right] dM(x), \qquad (11)$$

где $\| a_{ij} \|$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, M — такая положительная на $G - \{e\}$ мера, что $\int \psi(x)\, dM(x) < \infty$, где функция $\psi \in C_2(G)$ определена равенством (10); *мера M и оператор $\Delta_2 = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ определяются независимо от выбора базиса $X_1, X_2, \ldots, X_n$ функций x_i. Представление формулой* (11) *единственно.*

В формуле (11) мы ввели обозначения:

$$D_i \chi = X_i \chi(e), \quad D_{ij} \chi = X_i X_j \chi(e).$$

Следствие. *Для того чтобы закон распределения μ на конечной абелевой группе G с отличной от нуля характеристической функцией был без*

анично делим, необходимо и достаточно, чтобы некоторое значение гарифма характеристической функции закона μ *представлялось в виде*

$$\log \Phi_\mu(\chi) = \int\limits_{G-\{e\}} [\chi(x) - 1]\, dM(x), \tag{12}$$

е M *— конечная положительная мера на* $G - \{e\}$.

Соединяя полученные результаты с выводами предыдущего параграфа, олучаем следующую теорему.

Теорема 7. *Для того чтобы закон распределения* μ *на компактной бэлевой группе Ли* G *был безгранично делим, необходимо и достаточно, тобы существовала такая подгруппа* H *группы* G, *что* μ *являлся бы прого* H*-равномерным законом, а некоторое значение логарифма характе-истической функции закона* μ/H *представлялось в виде* (11). *Это пред-тавление логарифма единственно.*

3.2.1. Полезно будет указать, как строится мера M. Рассмотрим для того семейство мер

$$P_t(E) = \frac{1}{t}\int\limits_E \psi(x)\, d\mu_t(x), \quad E \subset G. \tag{13}$$

ак как $t^{-1}\int \psi d\mu_t$ имеет предел, то семейство (13) равномерно ограничено о t. Поэтому можно считать, что P_t слабо сходятся к некоторой конечной оложительной мере P. Тогда мера M получается из P следующим образом м. [5], § 3):

$$M(dx) = \psi^{-1}(x)\, P(dx).$$

3.3. Каноническое представление безгранично делимых законов на вполне есвязных группах. Пусть G — бикомпактная вполне несвязная абелева руппа. Известно, что в любой окрестности ее единицы $U(e)$ существует ткрытый нормальный делитель N группы G (см. [9], теорема 17). Так как актор-группа G/N дискретна и бикомпактна одновременно, то она ко-ечна. Пусть $\{U_\alpha\}$ — некоторая полная система окрестностей единицы e руппы G, где α — индекс, пробегающий несчетное множество Λ. Открытую одгруппу, содержащуюся в окрестности U_α, обозначим N_α, $\alpha \in \Lambda$. Усло-имся также писать $G_\alpha = G/N_\alpha$.

Займемся теперь выводом канонического представления безгранично дели-ого закона μ на группе G. Мы ограничимся случаем, когда характеристи-еская функция $\Phi_\mu(\chi)$ закона μ отлична от нуля. Исходя из теоремы 3, ы можем провести через μ непрерывную однопараметрическую полугруппу ер μ_t, так что $\mu_1 = \mu$. Тогда из рассуждений, проведенных в начале астоящего параграфа, следует, что для того чтобы получить представление арактеристической функции закона μ, необходимо вычислить функционал

$$A\chi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int (\chi(x) - 1)\, d\mu_t(x),$$

осле чего значения характеристической функции определяются по формуле: $\Phi_\mu(\chi) = \exp(A\chi)$.

Рассмотрим семейство положительных мер

$$M_t(E) = \frac{1}{t}\mu_t(E), \quad E \subset G.$$

Пусть E — измеримое подмножество G, которое отделяется от единицы некоторой окрестностью U. Исследуем предельное поведение величины $M_t(E)$ когда $t \to 0$. При этом для наших целей достаточно ограничиться последовательностью $M_n(E)$, соответствующей значениям параметра $t = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Без ограничения общности можно предположить, что $U_\alpha \subset U$ при произвольном α.

Спроектируем меры M_n на фактор-группы $G_\alpha = G/N_\alpha$. Как доказано в [11] (см. теорему 5.7), меры $M_n^{(\alpha)} = M_n/N_\alpha$ сходятся на $G - e_\alpha$ (e_α — единица группы G_α) к конечной положительной мере $M^{(\alpha)}$. Предположим теперь, что множество E таково, что найдется некоторый индекс $\alpha \in \Lambda$ такой, что

$$E = E \cdot N_\alpha. \tag{14}$$

Очевидно, тогда и для всех $\beta > \alpha$ будет $E = E \cdot N_\beta$ (мы считаем $\beta > \alpha$, если $N_\beta \subset N_\alpha$). Поэтому для $\beta \geqslant \alpha$ можно говорить о $M^{(\beta)}(E)$, величина которого для всех указанных $\beta \in \Lambda$ одна и та же (последнее утверждение следует из равенства $M_n^{(\alpha)}(E) = M_n^{(\beta)}(E)$). Под величиной $M^{(\beta)}(E)$ мы понимаем, конечно, меру $M^{(\beta)}$ образа множества E при естественном гомоморфизме G на G_β. Если существует индекс $\alpha' \in \Lambda$, несравнимый с α, и для него выполнено соотношение (14), то группа $N_\alpha \cdot N_{\alpha'}$ входит в нашу систему $\{N_\alpha\}$ и для нее, очевидно, выполняется соотношение (14). Поэтому существует индекс $\alpha'' \in \Lambda$, такой, что $N_{\alpha''} = N_\alpha \cdot N_{\alpha'}$; при этом $\alpha'' < \alpha$ и $\alpha'' < \alpha'$. Из предыдущего мы заключаем, что $M^{(\alpha'')}(E) = M^{(\alpha)}(E)$ и $M^{(\alpha'')}(E) = M^{(\alpha')}(E)$. Следовательно, можно говорить об общей для всех $\alpha \in \Lambda$, определенных соотношением (14), величине $M^{(\alpha)}(E)$. Если α — какой-нибудь из определенных таким образом, индексов, то положим

$$M(E) = M^{(\alpha)}(E). \tag{15}$$

Так как $M_n(E) = M_n^{(\alpha)}(E)$, то, как следует из предыдущего,

$$M(E) = \lim_{n \to \infty} M_n(E).$$

Будем говорить, что множество E из $G - \{e\}$ принадлежит к системе множеств $\mathbf{R}$, если найдется хоть один индекс $\alpha \in \Lambda$, такой, что E и N_α удовлетворяют соотношению (14). Докажем, что система множеств $\mathbf{R}$ образует кольцо. Как известно, класс множеств называется кольцом, если он замкнут относительно образования соединений и собственных разностей. Докажем, например, что сумма $E_1 \cup E_2$ двух множеств из $\mathbf{R}$ принадлежит опять к системе $\mathbf{R}$. Доказательство для разности проводится аналогично. Из условия мы заключаем, что существуют индексы α_1, $\alpha_2 \in \Lambda$, что

$$E_1 = E_1 \cdot N_{\alpha_1}, \quad E_2 = E_2 \cdot N_{\alpha_2}.$$

Пересечение открытых подгрупп N_{α_1} и N_{α_2} снова дает открытую подгруппу G. Следовательно, существует индекс $\alpha' \in \Lambda$, что $N_{\alpha'} = N_{\alpha_1} \cap N_{\alpha_2}$. Легко видеть, что $E_1 = E_1 \cdot N_{\alpha'}$ и $E_2 = E_2 \cdot N_{\alpha_2}$; поэтому $E_1 \cup E_2 = (E_1 \cup E_2) \cdot N_{\alpha'}$, т. е. $E_1 \cup E_2$ принадлежит системе $\mathbf{R}$.

Итак, класс множеств $\mathbf{R}$ есть кольцо. На кольце $\mathbf{R}$ при помощи равенства (15) определена конечная положительная мера $M(E)$. По известной

еореме, мера $M(E)$, заданная на кольце $\mathbf{R}$, единственным образом расши-ется на минимальное σ-кольцо $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, содержащее $\mathbf{R}$. Продолженную меру ы будем обозначать тем же символом — $M(E)$.

Заметим, что если группа G обладает аксиомой счетности, то всякое орелевское множество из $G - \{e\}$ входит в $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.

Пусть χ — произвольный характер группы G. Покажем, что χ измерим сносительно σ-кольца $\mathbf{S}(\mathbf{R})$. По теореме 46 из [9] группа характеров $X(G)$ олне несвязной группы G состоит из элементов конечного порядка. По-тому χ — гомоморфное отображение группы G на конечную циклическую уппу. Тогда ядро этого гомоморфизма есть открытая подгруппа G, которую ы обозначим через N_{α_0}, где $\alpha_0 \in \Lambda$. Понятно, что прообразы измеримых ножеств при отображении χ принадлежат кольцу $\mathbf{R}$, а следовательно, и $(\mathbf{R})$.

Поскольку

$$\exp(A\chi) = \int_G \chi(x)\, d\mu(x) = \int_{G_{\alpha_0}} \chi(x_0)\, d(\mu/N_{\alpha_0})(x_0) = \exp(A_0\chi),$$

$A\chi = A_0\chi$. Но по следствию из теоремы 6 имеем

$$A_0\chi = \int_{G_{\alpha_0} - \{e_{\alpha_0}\}} (\chi(x_0) - 1)\, dM^{(\alpha_0)}(x_0).$$

меним, что $M/N_{\alpha_0} = M^{(\alpha_0)}$. Тогда

$$\int_{G-\{e\}} (\chi(x) - 1)\, dM(x) = \int_{G_{\alpha_0} - \{e_{\alpha_0}\}} (\chi(x_0) - 1)\, dM^{(\alpha_0)}(x_0).$$

тсюда мы заключаем, что имеет место представление

$$\log \Phi_\mu(\chi) = \int_{G-\{e\}} (\chi(x) - 1)\, dM(x), \tag{16}$$

е M — конечная положительная мера, определенная на σ-кольце $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ ножеств из $G - \{e\}$. Представление (16) единственно. В самом деле, как ы отметили, $M/N_\alpha = M^{(\alpha)}$. Так как пересечение всех подгрупп N_α содержит шь единицу, то единственность меры M следует из единственности мер $^{(\alpha)}$ на соответствующих фактор-группах G_α. Таким образом, доказана

Теорема 8. *Для того чтобы закон распределения μ на бикомпактной олне несвязной абелевой группе G был безгранично делимым, необходимо достаточно, чтобы существовала такая подгруппа H группы G, что являлся бы строго H-равномерным законом, а некоторое значение лога-ифма характеристической функции закона μ/H представлялось в виде 6). Представление логарифма формулой* (16) *единственно.*

§ 4. Предельные теоремы

4.1. Схема серий. Рассмотрим классическую задачу об отыскании пре-льных законов для последовательности серий случайных величин, незави-мых в каждой серии. Иначе говоря, ищется предельное распределение для следовательности законов

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots, \tag{17}$$

где

$$\mu_n = \mu_{n1}\mu_{n2} \dots \mu_{nk_n}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{18}$$

В аддитивно записываемых группах предполагается обычно еще бесконечная малость слагаемых, составляющих серии. В нашем случае это условие будет высказано в следующей форме: для любой окрестности U единицы e

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mu_{nk}(U) = 1. \tag{19}$$

4.1.1. Имеет место следующая

Теорема 9. *Пусть G есть s-мерный тор. Для того чтобы последовательность* (17) *законов распределения на G, удовлетворяющих условиям* (18) *и* (19), *имела предел, необходимо и достаточно, чтобы сходилась последовательность безгранично делимых законов распределения*

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots, \tag{20}$$

характеристические функции которых задаются формулами

$$\Phi_{\nu_n}(\chi) = \prod_{k=1}^{k_n} \chi(c_{nk}) \exp\left\{\sum_{k=1}^{k_n} \int (\chi(x) - 1)\, d(\mu_{nk} c_{nk}^{-1})(x)\right\},$$

где c_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n,\ n = 1, 2, \dots)$ есть некоторые точечные массы, такие что $c_{nk} \to e$ при $n \to \infty$ равномерно по k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$. Предельные законы для последовательностей (17) *и* (20) *совпадают.*

Доказательство. Обозначим через Φ_{nk} характеристическую функцию закона μ_{nk}, а через Φ_n — закона μ_n. Пусть характеристическая функция закона $\mu'_{nk} = \mu_{nk} \cdot c_{nk}^{-1}$ есть Φ'_{nk}. Тогда имеем

$$\Phi_n(\chi) = \prod_{k=1}^{k_n} \Phi_{nk}(\chi) = \prod_{k=1}^{k_n} \chi(c_{nk}) \cdot \Phi'_{nk}(\chi).$$

Положим

$$\Phi'_{nk}(\chi) = 1 + \beta_{nk}(\chi) = 1 + \beta_{nk}.$$

Из условия следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\beta_{nk}| = 0,$$

и мы, следовательно, можем записать разложение

$$\log \Phi'_{nk}(\chi) = \log(1 + \beta_{nk}) = \beta_{nk} - \frac{1}{2}\beta_{nk}^2 + \frac{1}{3}\beta_{nk}^3 - \dots.$$

Очевидно, $\Phi_{\nu_n}(\chi)$ переписывается в виде

$$\Phi_{\nu_n}(\chi) = \prod_{k=1}^{k_n} \chi(c_{nk}) \exp\left\{\sum_{k=1}^{k_n} (\Phi'_{nk}(\chi) - 1)\right\} = \prod_{k=1}^{k_n} \chi(c_{nk}) \cdot e^{\sum_{k=1}^{k_n} \beta_{nk}}.$$

Тогда при достаточно больших n действует известная оценка:

$$|\log \Phi_n(\chi) - \log \Phi_{\nu_n}(\chi)| = \left|\sum_{k=1}^{k_n} \log \Phi'_{nk}(\chi) - \sum_{k=1}^{k_n} \beta_{nk}\right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{k_n} (\log(1+\beta_{nk}) - \beta_{nk}) \right| \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |\beta_{nk}| \cdot \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{nk}|.$$

В дальнейшем мы воспользуемся одним методом рассуждения Б. В. Гнеенко (см. [2]) и перенесем его на рассматриваемый случай.

Пусть предел последовательности (17) существует и

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{k_n} \Phi_{nk}(\chi) = \varphi(\chi).$$

огда будет

$$\prod_{k=1}^{k_n} |\Phi'_{nk}(\chi)| \to |\varphi(\chi)|$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \log |\Phi'_{nk}(\chi)|^2 \to \log |\varphi(\chi)|^2 = B(\chi).$$

бозначим $|\Phi'_{nk}(\chi)|^2 = 1 + \alpha_{nk}$; при этом, очевидно, будет $\alpha_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$.
огда можно воспользоваться разложением

$$\log |\Phi'_{nk}(\chi)|^2 = \alpha_{nk} - \frac{1}{2}\alpha_{nk}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{nk}^3 - \dots .$$

ри больших n $|\alpha_{nk}| < \frac{1}{2}$ и поэтому

$$\left| \frac{1}{2}\alpha_{nk}^2 - \frac{1}{3}\alpha_{nk}^3 + \dots \right| \leqslant \frac{1}{2} \frac{|\alpha_{nk}|}{1 - |\alpha_{nk}|} \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_{nk}|.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon + |B(\chi)| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} |\alpha_{nk}| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ 1 - \left(\int R\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right)^2 - \left(\int I\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right)^2 \right\}. \qquad (21)$$

Для данного $\eta > 0$ при достаточно больших n

$$\int R\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) > 1 - \eta,$$

ледовательно,

$$1 - \left(\int R\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right)^2 = \left(1 + \int R\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right) \left(1 - \int R\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right) \geqslant$$
$$\geqslant (2 - \eta) \cdot \int (1 - R\chi(x))\, d\mu'_{nk}(x). \qquad (22)$$

Пусть $\Delta \subset G$ — область, где $I\chi(x) > 0$ (или $I\chi(x) < 0$). Тогда имеем

$$\left(\int I\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right)^2 \leqslant \left(\int_{\Delta} I\chi(x)\, d\mu'_{nk}(x) \right)^2.$$

Для любого $\eta > 0$ при достаточно больших n будет

$$\mu'_{nk}(\Delta) \leqslant \frac{1}{2} + \eta.$$

Поэтому по неравенству Шварца

$$\Big(\int_{\Delta} I\chi(x)\,d\mu'_{nk}(x)\Big)^2 \leqslant \int_{\Delta} d\mu'_{nk}(x)\cdot\int_{\Delta} |I\chi(x)|^2\,d\mu'_{nk}(x) \leqslant$$

$$\leqslant\Big(\frac{1}{2}+\eta\Big)\cdot\int |I\chi(x)|^2\,d\mu'_{nk}(x).$$

Применяя неравенство М. Г. Крейна для положительно определенных функций (см. [12], стр. 184), получаем

$$|I\chi(x)|^2 \leqslant |\chi(x)-1|^2 \leqslant 2(1-R\chi(x)),$$

откуда окончательно

$$\Big(\int_{\Delta} I\chi(x)\,d\mu'_{nk}(x)\Big)^2 \leqslant (1-2\eta)\cdot\int (1+R\chi(x))\,d\mu'_{nk}(x). \qquad (23$$

Из неравенств (21), (22) и (23) получаем

$$\varepsilon+|B(\chi)| > \frac{1}{2}(1-3\eta)\cdot\sum_{k=1}^{k_n}\int (1-R\chi(x))\,d\mu'_{nk}(x).$$

Для достаточно больших n можно выбрать $\eta=\frac{1}{9}$. Тогда

$$\varepsilon+|B(\chi)| > \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k_n}\int (1-R\chi(x))\,d\mu'_{nk}(x).$$

Таким образом, мы доказали, что из существования предела у последовательности (17) следует ограниченность сумм $\sum_{k=1}^{k_n}|R\beta_{nk}|$. Покажем, что этот же результат вытекает из сходимости последовательности (20). Действительно, как мы знаем, в этом случае существует предел $\lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{nk}\right)$. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty}\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{nk}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{k_n}R\beta_{nk}\right)$$

и, следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}R\beta_{nk}.$$

Так как, начиная с некоторого n, $R\Phi'_{nk}(\chi)>0$, то при достаточно больших n будет $R\beta_{nk}\leqslant 0$. Поэтому существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|R\beta_{nk}|,$$

следовательно, суммы $\sum_{k=1}^{k_n}|R\beta_{nk}|$ ограничены.

Теперь подошло время сказать, как мы выбираем точки c_{nk}. Выберем
ементы $c_{nk} = (c_{nk}^1, \ldots, c_{nk}^s)$, чьи компоненты c_{nk}^i определяются из равен-
ва

$$c_{nk}^i = \int x_i d\mu_{nk}(x), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{24}$$

ля любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n

$$|c_{nk}^i| \leqslant \int |x_i| d\mu_{nk}(x) = \int\limits_{|x|<\varepsilon} |x_i| d\mu_{nk}(x) + \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} |x_i| d\mu_{nk}(x) \leqslant 2\varepsilon,$$

куда следует, что c_{nk} сходятся к нулю (в аддитивно записываемой группе).
Каждый характер $\chi \in X(G)$ представляется в виде:

$$\chi(x) = \chi(x_1, \ldots, x_s) = \exp\{i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)\},$$

е m_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ — произвольные целые числа. Тогда запишем

$$-R\beta_{nk} = \int (1 - R\chi(x))\, d\mu'_{nk}(x) =$$

$$= \int \ldots \int [1 - \cos(m_1x_1 + \ldots m_sx_s)]\, d\mu'_{nk}(x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \int\limits_D (1 - \cos t)\, d\mu'_{nk}(x) + \int\limits_{G-D} (1 - \cos t)\, d\mu'_{nk}(x),$$

е мы обозначили $t = m_1x_1 + \ldots + m_sx_s$, а область D определяется как

$$D = \{x = (x_1, \ldots, x_s) : |m_1x_1 + \ldots + m_sx_s| \leqslant 1\}.$$

ценим каждый член в правой части последнего равенства. Имеем, очевидно,

$$\int\limits_D (1 - \cos t)\, d\mu'_{nk}(x) \geqslant \frac{1}{3} \int\limits_D t^2 d\mu'_{nk}(x),$$

$$\int\limits_{G-D} (1 - \cos t)\, d\mu'_{nk}(x) \geqslant C \cdot \int\limits_{G-D} d\mu'_{nk}(x), \quad C > 0.$$

этому из ограниченности $\sum\limits_{k=1}^{k_n} |R\beta_{nk}|$ следует ограниченность сумм

$\int\limits_D t^2 d\mu'_{nk}(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \mu'_{nk}(G - D)$. Покажем, что в этом случае суммы

$|\beta_{nk}|$ также будут ограничены. Заметим предварительно, что

$d\mu'_{nk}(x) = 0$.

Поэтому имеем

$$|\beta_{nk}| = \left|\int (e^{it} - 1)\, d\mu'_{nk}(x)\right| = \left|\int (e^{it} - 1 - it)\, d\mu'_{nk}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int t^2 d\mu'_{nk}(x) = \frac{1}{2} \int\limits_D t^2 d\mu'_{nk}(x) + \frac{1}{2} \int\limits_{G-D} t^2 d\mu'_{nk}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_D t^2 d\mu'_{nk}(x) + C_1 \cdot \int\limits_{G-D} d\mu'_{nk}(x),$$

куда и следует ограниченность $\sum\limits_{k=1}^{k_n} |\beta_{nk}|$.

Таким образом, при выполнении условия (19) и существования предел у одной из последовательностей (17) или (20) получаем

$$\lim_{n\to\infty} |\log \Phi_n(\chi) - \log \Phi_{\nu_n}(\chi)| = 0,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

4.1.2. Теорема 10. *Пусть G есть вполне несвязная бикомпактная абелева группа. Для того чтобы последовательность* (17) *законов распределения на G, удовлетворяющих условиям* (18) *и* (19), *имела предел, необходимо и достаточно, чтобы сходилась последовательность безгранично делимых законов распределения*

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots,$$

характеристические функции которых задаются формулами

$$\Phi_{\nu_n}(\chi) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{k_n} \int (\chi(x) - 1)\, d\mu_{nk}(x)\right\}.$$

Предельные законы для обеих последовательностей совпадают.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, доказывается, что из существования предела у одной из последовательностей (17) или (20) следует ограниченность сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} |R\beta_{nk}|. \qquad (25$$

Всякая вполне несвязная бикомпактная группа является проективным пределом конечных групп, т. е. в любой окрестности единицы U_α группы G найдется нормальный делитель N_α, фактор-группа по которому $G_\alpha = G/N_\alpha$ конечна (см. [9], теорема 17). Меры μ_{nk} индуцируют при естественном гомоморфизме G на G_α меры μ_{nk}/N_α, которые, как легко проверить, удовлетворяют условиям теоремы для группы G_α. Данный характер $\chi \in X(G)$ можно рассматривать и как характер на некоторой системе конечных групп G_α (см. предыдущий параграф). При этом значения характеристических функций $\Phi_{nk}(\chi)$ и $\Phi_{nk}^{(\alpha)}(\chi)$, вычисленные соответственно на группах G и G_α (по индуцированной мере), оказываются одинаковыми. Поэтому можно свести вопрос об ограниченности сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{nk}| \qquad (26$$

на группе G к исследованию этой величины на некоторых конечных группах. Так как для конечных групп из ограниченности сумм (25) следует ограниченность сумм (26) (см. [11], теорема 6.3), то этим самым наша теорема доказана.

4.1.3. Следствие. *Пусть G — вполне несвязная бикомпактная абелева группа или тор конечной размерности. Предел последовательности* (17) *законов распределения на G, удовлетворяющих условиям* (18) *и* (19), *является безгранично делимым законом.*

Очевидно и обратное утверждение: *всякий безгранично делимый закон распределения на G является предельным для некоторой последователь*

ности законов распределения (17), *для которой справедливы соотношения* (18) *и* (19).

4.2. Общий принцип сходимости в коммутативном случае. В работе [7] мы доказали общий принцип сходимости для произвольной бикомпактной группы. Здесь будет дано доказательство этого принципа в коммутативном случае методом характеристических функций. Суть дела поясняет следующая

Теорема 11. *Пусть имеется последовательность независимых случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *со значениями из бикомпактной абелевой группы* G. *Составим композиции*

$$\zeta_n = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n.$$

Тогда найдутся такие постоянные элементы $a_n \in G$, *что последовательность нормированных композиций*

$$\eta_n = \zeta_n \cdot a_n$$

имеет предельное распределение.

Доказательство. Пусть распределение случайной величины ξ_i задается мерой μ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$\nu_n = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n.$$

Рассмотрим предельные элементы для последовательности ν_n, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть имеются по крайней мере два таких элемента ν и ν'. Без ограничения общности мы можем считать группу G сепарабельной. Выберем тогда такие системы индексов $\{n_i\}$ и $\{n_i'\}$, чтобы $\nu_{n_i} \to \nu$ и $\nu_{n_i'} \to \nu'$.

Эти индексы выберем таким образом, чтобы $n_i < n_i'$. Обозначим

$$\lambda_{n_i} = \mu_{n_i+1} \ldots \mu_{n_i'}.$$

Из последовательности λ_{n_i} выберем сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять индексов, считаем, что

$$\lambda_{n_i} \to \lambda.$$

Из $\nu_{n_i'} = \nu_{n_i} \cdot \lambda_{n_i}$ следует, что $\nu' = \nu \cdot \lambda$. Поэтому $\Phi_{\nu'} = \Phi_\nu \cdot \Phi_\lambda$.

Докажем, что

$$|\Phi_{\nu'}| = |\Phi_\nu|. \tag{27}$$

Действительно, $|\Phi_{\nu_n}| = |\Phi_{\mu_1}| \ldots |\Phi_{\mu_n}|$. Так как $|\Phi_{\mu_n}| \leqslant 1$, то последовательность $|\Phi_{\nu_n}|$ незозрастаю цая. Значит, она имеет некоторый предел a. Но любая подпоследовательность последовательности $|\Phi_{\nu_n}|$ тоже будет сходиться к a, поэтому $|\Phi_\nu| = |\Phi_{\nu'}| = a$.

Из равенства $|\Phi_{\nu'}(\chi)| = |\Phi_\nu(\chi)| \cdot |\Phi_\lambda(\chi)|$ следует, что $|\Phi_\lambda(\chi)| = 1$ для тех $\chi \in X(G)$, для которых $|\Phi_\nu(\chi)| > 0$. Но равенство

$$\left| \int \chi(x)\, d\lambda(x) \right| = 1$$

возможно лишь тогда, когда $\chi(x)$ принимает одно и то же значение для всех элементов носителя меры $\lambda(E)$. Поэтому для любых элементов

x_1, $x_2 \in \omega(\lambda)$ и χ, для которого $|\Phi_\nu(\chi)| > 0$,

$$\chi(x_1 x_2^{-1}) = \chi(e), \quad e \text{ — единица } G.$$

Из (27) видно, что если ν является строго H-равномерным законом, то таким же является и ν', и наоборот. Допустим сначала, что ν и ν' есть строго e-равномерные законы. Так как множество тех χ, для которых $\Phi_\nu(\chi)| > 0$, порождает всю группу $X(G)$ (см. следствие из теоремы 1), то

$$x_1 = x_2$$

для всех x_1, $x_2 \in \omega(\lambda)$. В этом случае мера $\lambda(E)$ сосредоточена в некоторой точке x_0: $\lambda = x_0$. Следовательно, $\nu' = \nu \cdot x_0$.

Теперь пусть ν и ν' являются строго H-равномерными законами распределения, где H — некоторая замкнутая (не единичная) подгруппа G. Проведя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$x_1 = x_2 h,$$

где $h \in H$. Это убеждает нас в том, что мера $\lambda(E)$ сосредоточена на некотором смежном классе $x_0 H$. Так как в то же время мера $\lambda(E)$ H-равномерна (значения характеристической функции $\Phi_\lambda(\chi)$ отличны от нуля для тех χ, для которых отличны от нуля значения $\Phi_\nu(\chi)$), то она является инвариантной мерой на $x_0 H$, т. е. ее можно представить в виде

$$\lambda = \mu_H \cdot x_0,$$

где μ_H — инвариантная нормированная мера Хаара подгруппы H. В этом случае опять имеем

$$\nu' = \nu \cdot \mu_H \cdot x_0 = \nu \cdot x_0,$$

что и доказывает теорему.

4.3. Общий вид предельных распределений. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и имеют законы распределения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$. Очевидно, композиции $\zeta_n = \xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_n$ распределены по закону $\nu_n = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$. В теореме 11 мы доказали, что композиции ζ_n всегда можно так нормировать при помощи сдвига, что они будут иметь предельное распределение. Поэтому можно предположить, что последовательность ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет предел. В этом разделе мы получим некоторые сведения об общем виде получающихся предельных распределений.

4.3.1. Теорема 12. *Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ есть последовательность законов распределения на бикомпактной абелевой группе G, и пусть существует*

$$\lim_{n \to \infty} \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = \mu.$$

Тогда закон μ будет строго H-равномерным по некоторой подгруппе H.

Доказательство. Обозначим $\nu_n = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$. Тогда по условию

$$\nu_n \to \mu \text{ при } n \to \infty.$$

Составим множества $M_k = \{\mu_k, \mu_{k+1}, \ldots\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Возьмем пересечение их замыканий $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{M}_k$, которое непусто. Если $\nu \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{M}_k$, то из соот-

ления $\nu_{n+1} = \nu_n \cdot \mu_{n+1}$ следует, что

$$\mu = \mu\nu.$$

к говорят, μ является инвариантным элементом в полугруппе мер $S(G)$. индукции доказывается, что для любого целого положительного числа будет

$$\mu = \mu\nu^n.$$

ли ν принадлежит к идемпотенту e_0, то, по непрерывности,

$$\mu = \mu e_0,$$

е. μ будет $\omega(e_0)$-равномерным законом. Если применить теперь рассуждение пункта 1.3.2, то получим утверждение теоремы.

Следствие. *Если в последовательности $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ бесконечное число раз встречается один и тот же закон ν, который принадлежит идемпотенту e_0', то предельный закон будет $\omega(e_0')$-равномерным.*

4.3.2. Пусть по-прежнему существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n = \mu$. Как мы выяснили из теоремы 12, характер предельного закона μ зависит от предельного множества $M = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{M}_k$. В излагаемой ниже теореме рассматривается один признак, позволяющий проанализировать это множество и определить подгруппу G, по которой закон μ будет равномерен.

Теорема 13. *Пусть характеристические функции законов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ не обращаются в нуль. Тогда для H-равномерности закона достаточно, чтобы в G существовало такое открытое множество $\mathfrak{O}$, порождающее подгруппу $\mathfrak{H}$, содержащую H (в случае строгой H-равномерности должно быть $\mathfrak{H} = H$), что для любого его непустого открытого подмножества V ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(V) \tag{28}$$

сходится.

Доказательство. Если возьмем $\chi \overline{\in} (X, H)$, то χ отличен от единицы хотя бы на одном из элементов $\mathfrak{O}$. Пусть этот элемент будет x_0. Тогда, в силу того, что характер есть непрерывная функция, найдется окрестность V точки x_0, для всех элементов которой χ будет мало отличаться от $\chi(x_0)$. Открытое множество V выберем так, чтобы оно лежало в $\mathfrak{O}$ и чтобы

$$\inf_{x\in V} |\chi(x) - 1| = \delta > 0.$$

Тогда для $\chi \overline{\in} (X, H)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |\chi(x) - 1|^2 \, d\mu_n(x) \tag{29}$$

сходится. В самом деле, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |\chi(x) - 1|^2 \, d\mu_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_V |\chi(x) - 1|^2 \, d\mu_n(x) \geqslant \delta^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(V).$$

Покажем, что из расходимости ряда (29) следует расходимость для

$\chi \overline{\in} (X, H)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int (\chi(x) - 1)\, d\mu_n(x). \tag{3}$$

Действительно, если бы ряд (30) сходился, то сходился бы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int (R\chi(x) - 1)\, d\mu_n(x). \tag{3}$$

Но по неравенству М. Г. Крейна

$$|\chi(x) - 1|^2 \leqslant 2(1 - R\chi(x)),$$

откуда и следует, что ряд (31) расходится — получили противоречие. Итак ряд (30) расходится. Но это означает, что при $\chi \overline{\in} (X, H)$ расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{\mu_n}(\chi) - 1), \tag{3}$$

откуда следует, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Phi_{\mu_n}(\chi) = \Phi_{\mu}(\chi) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, при $\chi \overline{\in} (X, H)$ $\Phi_{\mu}(\chi) = 0$. А это и означает как раз, что закон μ H-равномерен.

Если при этом μ оказался строго H-равномерным законом, то необходимо $\mathfrak{H} = H$. Действительно, если бы $\mathfrak{H} \supset H$, то при $\chi \overline{\in} (X, \mathfrak{H})$ ряд (2 расходился бы, и тогда $\Phi_{\mu}(\chi) = 0$. Иначе говоря, μ оказался бы $\mathfrak{H}$-равномерным законом, что противоречит его строгой H-равномерности. Теорема доказана.

Теперь перейдем к общему случаю, когда характеристические функции законов μ_n могут обращаться в нуль. Обозначим через Ω множество таких характеров группы G, что при $\chi \in \Omega$ хотя бы одно из чисел $\Phi_{\mu_1}(\chi)$, ..., $\Phi_{\mu_n}(\chi)$, ... равно нулю.

Теорема 14. *Для H-равномерности закона μ достаточно, чтобы в G существовало такое открытое множество $\mathfrak{O}$, что для любого его непустого открытого подмножества V ряд* (28) *расходится, причем $\mathfrak{O}$ порождает подгруппу $\mathfrak{H}$ и $(X, \mathfrak{H}) \cap (X/\Omega)$ содержится в (X, H) (в случае строгой H-равномерности μ $(X, \mathfrak{H}) \cap (X/\Omega)$, кроме того, не должно содержаться ни в какой подгруппе (X, H), отличной от (X, H)).*

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы необратимостью в нуль Φ_{μ_n} мы пользовались только при переходе от соотношения (33) к расходимости ряда (32). Поэтому $\Phi_{\mu}(\chi) = 0$ при $\chi \overline{\in} (X, \mathfrak{H})$. Кроме того, при наших предположениях $\Phi_{\mu}(\chi) = 0$ при $\chi \in \Omega$. Следовательно, область неnулевых значений $\Phi_{\mu}(\chi)$ содержится в $(X, \mathfrak{H}) \cap (X/\Omega)$, откуда следует H-равномерность μ для любой подгруппы H, удовлетворяющей условию

$$(X, H) \supset (X, \mathfrak{H}) \cap (X/\Omega).$$

Если же закон μ строго H-равномерен, то утверждение теоремы очевидно.

Следствие. *Если* $\Omega \bigcup (X, H) = X(G)$, *то закон распределения* μ *является* H*-равномерным, независимо от сходимости ряда* (28) *где-либо.*

4.4. Обобщение одной теоремы Кавада и Ито. В своей работе [14] японские математики Кавада и Ито доказали теорему о существовании предела последовательности взаимно коммутирующих распределений на связной бикомпактной (необязательно коммутативной) сепарабельной группе (см. [14], теорема 11). В [7] (см. теорему 11) нам удалось отбросить одно ограничение, именно — предположение о том, что G обладает аксиомой счетности. В настоящий момент мы сможем доказать теорему без предположения взаимной коммутируемости рассматриваемых законов распределения.

Через $m(E)$ обозначим инвариантную меру Хаара группы G. Группа G не предполагается коммутативной.

Теорема 15. *Пусть* G *— связная бикомпактная группа, а* $\mu_1\ \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ *— последовательность законов распределения на ней. Если существует пара положительных констант* ε *и* η, *не зависящих от* n, *таких, что*

$$\mu_n(E) < 1 - \eta \tag{34}$$

выполняется для любого борелевского множества E, *для которого* $m(E) < \varepsilon$, *тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n = m.$$

Доказательство. Покажем сначала, что если меры μ и ν удовлетворяют условию (34), то и их свертка $\mu\nu$ также удовлетворяет этому условию. В самом деле, пусть множество E таково, что $m(E) < \varepsilon$. Тогда

$$\mu\nu(E) = \int \mu(Ex^{-1})\, d\nu(x) < \int (1-\eta)\, d\nu(x) = 1 - \eta,$$

поскольку $m(Ex^{-1}) = m(E) < \varepsilon$.

Пусть последовательность $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ законов распределения на G, удовлетворяющих условию (34), сходится к ν. Докажем, что и предельная мера ν удовлетворяет этому условию. Предположим, что V есть открытое множество, такое, что $m(V) < \varepsilon$. В силу регулярности меры ν для данного $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое замкнутое множество $C \subset V$, что

$$\nu(V) - \nu(C) < \varepsilon_1.$$

По лемме Урысона найдется функция $f \in C(G)$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, такая, что $f(x) = 1$ на C и $f(x) = 0$ на $G - V$. Так как меры ν_n сходятся к ν, то для данного $\varepsilon_2 > 0$ и достаточно больших n имеем

$$\left| \int f d\nu - \int f d\nu_n \right| < \varepsilon_2,$$

откуда

$$\int f d\nu < \int f d\nu_n + \varepsilon_2 \leqslant \nu_n(V) + \varepsilon_2 < 1 - \eta + \varepsilon_2.$$

Следовательно,

$$\nu(C) < \int f d\nu < 1 - \eta + \varepsilon_2.$$

Тогда, в силу произвольности ε_2

$$\nu(C) \leqslant 1 - \eta. \tag{35}$$

Из условия следует, что

$$\nu(V) < \nu(C) + \varepsilon_1 \leqslant 1 - \eta + \varepsilon_1.$$

Если теперь ε_1 произвольно уменьшать, то будут меняться и множества C. Но для них, очевидно, равенство (35) сохранится, поэтому в пределе получаем:

$$\nu(V) \leqslant 1 - \eta.$$

Пусть теперь E — произвольное борелевское множество, для которого $m(E) < \varepsilon$. В силу регулярности меры m найдется такое открытое множество $V \supset E$, что $m(V) < \varepsilon$. По доказанному, тогда

$$\nu(V) \leqslant 1 - \eta,$$

следовательно, и

$$\nu(E) \leqslant \nu(V) \leqslant 1 - \eta,$$

что и требовалось доказать.

Следующим этапом будет доказательство утверждения, что каждая мера μ, удовлетворяющая условию (34), принадлежит к идемпотенту $m \in S(G)$. Действительно, любая собственная подгруппа G (а следовательно, и любой класс смежности) имеет m-меру нуль (в силу связности группы G). Следовательно, мера μ любой подгруппы (и любого класса смежности) меньше единицы, т. е. μ не сосредоточена внутри никакого смежного класса по подгруппе G, отличной от G. Это значит (см. [7], § 4), что μ, как элемент полугруппы $S(G)$, принадлежит к идемпотенту m.

Обозначим $\nu_n = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$. Как следует из общего принципа сходимости для бикомпактных групп (см. [7], теорема 12), найдутся постоянные элементы $a_n \in G$ такие, что последовательность распределений $\nu_n' = \nu_n a_n$ сходится к некоторому пределу ν'. Нетрудно проверить, что меры ν_n' также удовлетворяют условию (34). Из теоремы 12 (в доказательстве которой, как легко проверить, мы не пользовались коммутативностью группы G) следует, что ν' является инвариантным элементом в $S(G)$, т. е. существует элемент $\mu \in S'(G)$, такой, что

$$\nu' = \nu' \mu.$$

Легко видеть, учитывая замкнутость класса рассматриваемых случайных величин, что μ принадлежит к идемпотенту m. Тогда

$$\nu' = \nu' m = m.$$

Следовательно, последовательность мер ν_n' сходится к инвариантной мере m.

Вернемся к исходной последовательности мер ν_n. Без ограничения общности можно считать, что группа G обладает аксиомой счетности. Тогда из бесконечной последовательности мер ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, выберем сходящуюся подпоследовательность

$$\nu_{n_i} \to \nu.$$

Но у нас $\nu_{n_i} a_{n_i}$ сходятся к инвариантной мере m. Поскольку меры ν и m должны быть одного типа (см. [7], теорема 8), то $\nu = m$. Следовательно,

бая сходящая подпоследовательность последовательности мер ν_n, $= 1, 2, \ldots$, имеет своим пределом m, т. е. меры ν_n сходятся к m, что требовалось доказать.

4.4.1. Специальные случаи доказанной теоремы получаются при замене ормулированного условия предположением, что μ_n абсолютно непрерывны отношению к $m(E)$ равномерно по n, или более сильным условием, что

$$\mu_n(E) < \alpha \cdot m(E), \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Поступила в редакцию
12.3.59

ЛИТЕРАТУРА

1] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann. Math., **55** (1952), 468—519.
2] Б. В. Гнеденко, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, Успехи матем. наук, X (1944), 115—165.
3] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., ГИТТЛ, 1949.
4] В. М. Глушков, Алгебры Ли локально компактных групп, Успехи матем. наук, **12**, 2 (74) (1957), 137—142.
5] G. A. Hunt, Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., **81**. 2 (1956), 264—293.
6] Б. М. Клосс, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, принимающих значения из бикомпактной группы, ДАН СССР, **109**, 3 (1956), 453—455.
7] Б. М. Клосс, О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 3 (1959), 255—290.
8] R. J. Koch, A. D. Wallace, Maximal ideals in compact semi-groups, Duke Math. J., **21**, 4 (1954).
9] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., ГИТТЛ, 1954.
0] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **1**, 2, (1956), 177—238.
1] Н. Н. Воробьев, Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах, Матем. сб., **34**, 1 (1954), 89—126.
2] А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применение, М., ИЛ., 1950.
3] J. G. Wendel, Haar measure and the semi-group of measures on a compact group. Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 6 (1954).
4] Y. Kawada, K. Ito, On the Probability Distribution on a Compact Group, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **22** (1940), 977—998.

LIMITING DISTRIBUTIONS ON BICOMPACT ABELIAN GROUPS

B. M. KLOSS (MOSCOW)

(Summary)

We consider random variables with values in a bicompact Abelian group G. The roperties of infinitely divisible laws on such groups are investigated in § 2 and 3. In ne last paragraph the various limit theorems are proved. The method of characteristic unctions is the main approach used.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ И МАРКОВОСТИ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

0. Как известно, для независимых испытаний вероятности совмещений их исходов являются функциями (произведениями) вероятностей самих исходов. Аналогичное обстоятельство имеет место и для мер на множестве всех совмещений исходов испытаний, если совместное распределение исходов соответствует марковской мере относительно некоторого комплекса (см. [1]). В настоящей заметке показывается, что функциональная зависимость вероятностей совмещений исходов испытаний от вероятностей исходов может быть (если не считать указываемых далее исключений) только в случае независимости испытаний. Родственный результат содержится в [2]. Для мер, марковских относительно произвольного регулярного комплекса, устанавливается сходный результат.

1. Далее под n-испытанием ($n \geqslant 2$) будет пониматься представление достоверного события в виде объединения n попарно несовместных событий (некоторые из них могут быть и невозможными).

Определим индуктивно понятие *n-мерной типовой функции распределения* (т. ф. р.). Функцию ψ_1 назовем одномерной т. ф. р., если

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } & x < 0, \\ x \text{ при } & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \text{ при } & 1 < x. \end{cases} \tag{1}$$

Функцию ψ от n переменных назовем n-мерной т. ф. р., если

а) ψ — функция распределения такой n-мерной случайной величины $(X_1, \ldots, X_n)$, для которой

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (0 \leqslant X_i \leqslant 1)\right) = 1; \tag{2}$$

б) ψ непрерывна по каждому своему аргументу;

в) каковы бы ни были $i = 1, \ldots, n$ и $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, сумма

$$\psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

есть некоторая $(n-1)$-мерная т. ф. р. от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция от n вещественных переменных; а $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — произвольные целые положительные числа. Будем говорить, что функция φ является $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-*типом зависимости*, если, каковы бы ни были m_i-испытания $\mathfrak{A}^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, n$) соответственно с исходами $A_1^{(i)}, \ldots, A_{m_i}^{(i)}$, существует такое $m_1 \ldots m_n$-испытание $\mathfrak{A}$, исходами которого являются события вида

$$A_{j_1}^{(1)} \cap A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)} \quad (i \leqslant j_i \leqslant m_i;\ i = 1, \ldots, n),$$

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}(A_{j_1}^{(1)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}) = \varphi\,(\mathbf{P}_{\mathfrak{A}^{(1)}}(A_{j_1}^{(1)}), \ldots, \mathbf{P}_{\mathfrak{A}^{(n)}}(A_{j_n}^{(n)})) \qquad (3)$$

всех возможных $j_1, \ldots, j_n$.

Очевидно, функция n переменных φ, являющаяся произведением всех своих аргументов, есть $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-тип зависимости при любых n и $m_1, \ldots, m_n$. Мы будем называть его *типом независимости* испытаний.

2. Теорема 1. *Пусть* $m_1, m_2, \ldots, m_l > 2$, $m_{l+1} = \ldots = m_n = 2$ $(0 \leqslant l \leqslant n)$. *Тогда для того, чтобы функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *являлась* $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$*-типом зависимости испытаний, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид* $x_1 \ldots x_l \times \psi_{n-l}(x_{l+1}, \ldots, x_n)$, *где* ψ_{n-l} *— некоторая* $(n-l)$*-мерная т. ф. р. В частности, если* n (*т. е., если каждое* $m_i \geqslant 3$), *то тип* ψ *может быть только типом независимости.*

Доказательство. Необходимость. Пусть φ есть $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-тип зависимости. В силу определения типа зависимости функция φ, должна быть определена для всех систем $x_1, \ldots, x_n$, для которых $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ и принимать неотрицательные значения, не превосходящие единицы.

Докажем непрерывность $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ по каждому аргументу (для определенности установим непрерывность этой функции по x_1 при любых значениях $x_2, \ldots, x_n$).

Пусть $0 < a_1 < \ldots < a_k < \ldots \to a_0$. Рассмотрим случайную величину X с функцией распределения (1). Событие

$$0 \leqslant X \leqslant a_k \qquad (4)$$

обозначим через $A_1^{(1),k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, а событие

$$a_k + \frac{l}{m_1 - 1}(1 - a_k) < X \leqslant a_k + \frac{l+1}{m_1 - 1}(1 - a_k) \qquad (5)$$

через $A_{l+2}^{(1),k}$ $(l = 0, 1, \ldots, m_1 - 2)$. В результате мы получим последовательность $\mathfrak{A}$-испытаний $\mathfrak{A}^{(1),0}, \mathfrak{A}^{(1),1}, \ldots, \mathfrak{A}^{(1),k}, \ldots$, каждое с исходами вида (4) и (5).

Возьмем далее в качестве $\mathfrak{A}^{(i)}$ $(i = 2, \ldots, n)$ m_i-испытания, в каждом из которых один из исходов имеет вероятность x_i. Обозначим исходы $\mathfrak{A}^{(i)}$ через $A_1^{(i)}, \ldots, A_{m_i}^{(i)}$. Пусть для определенности $\mathbf{P}(A_1^{(i)}) = x_i$.

Ввиду того что φ по предположенному является $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$-типом зависимости, можно указать такие $m_1 \ldots m_n$-испытания $\mathfrak{B}^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, исходами которых являются события вида $A_{j_1}^{(1),k} \cap A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}$ и для которых

$$\mathbf{P}(A_{j_1}^{(1),k} \cap A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}) = \varphi(a_k, \mathbf{P}(A_{j_2}^{(2)}), \ldots, \mathbf{P}(A_{j_n}^{(n)})).$$

Но тогда

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(a_k, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{k\to\infty} \varphi\,(a_k, \mathbf{P}(A_1^{(2)}), \ldots, \mathbf{P}(A_1^{(n)})) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(A_1^{(1),k} \cap A_1^{(2)} \cap \ldots \cap A_1^{(n)}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{t=1}^{k} A_1^{(1),t} \cap A_1^{(2)} \cap \ldots \cap A_1^{(n)}\right) =$$

$$= \mathbf{P}(A_1^{(1),0} \cap A_1^{(2)} \cap \ldots \cap A_1^{(n)}) = \varphi(a_0, \mathbf{P}(A_1^{(2)}), \ldots, \mathbf{P}(A_1^{(n)})) = \varphi(a_0, x_2, \ldots, x_n),$$

непрерывность слева доказана. Аналогично устанавливается непрерывность справа и тем самым непрерывность функции φ по каждому из аргументов.

Заметим далее, что $\varphi(x_1, \ldots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ — вероятность совмещения нескольких событий, одно из которых имеет вероятность нуль. Поэтому при любых

$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0.$$

Предположим теперь, что $l \geqslant 0$ (т. е., что $m_1 \geqslant 3$). В этом случае из формулы (при любых m_i-испытаниях $\mathfrak{A}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ с исходами $A_{j_i}^{(i)}$ $(j_i = 1, \ldots, m_i)$, для к торых $\mathbf{P}(A_{j_i}^{(i)}) = x_{ij_i}$,

$$\sum_{j_1=1}^{m_1} \varphi(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \boldsymbol{P}(A_{j_1}^{(1)} \cap A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}).$$

В частности, при $x_{11} = \alpha$, $x_{12} = \beta$, $x_{13} = 1 - \alpha - \beta$, $x_{14} = \ldots = x_{1n} = 0$ в си (6) получаем

$$\varphi(\alpha, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) + \varphi(\beta, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) +$$

$$+ \varphi(1 - \alpha - \beta, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) = \mathbf{P}(A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}).$$

Полагая далее $x_{11} = \alpha + \beta$, $x_{13} = 1 - \alpha - \beta$, $x_{12} = x_{14} = \ldots = 0$, мы получаем то так же

$$\varphi(\alpha + \beta, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) + \varphi(1 - \alpha - \beta, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) = \mathbf{P}(A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}).$$

Сопоставление равенств (7) и (8) дает нам

$$\varphi(\alpha, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) + \varphi(\beta, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n}) = \varphi(\alpha + \beta, x_{2j_2}, \ldots, x_{nj_n})$$

при любых неотрицательных α, β, для которых $\alpha + \beta \leqslant 1$. Но это возможно для н прерывной функции φ лишь в том случае, когда она линейна относительно перво своего аргумента: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$. Проводя аналогичные рассужден применительно к $x_2, \ldots, x_l$, мы получаем $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_l\psi(x_{l+1}, \ldots, x_n$

Остается доказать, что функция ψ есть $(n - l)$-мерная т. ф. р. Будем далее пр стоты ради считать, что $l = 0$, а доказательство будем вести индукцией по n. В случ $n = 1$ доказываемое утверждение тривиально. Пусть для всех функций ψ, имеющ меньше, чем n аргументов, оно также справедливо.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — одномерные случайные величины, каждая из которы имеет функцию распределения $\psi_1(x)$. Возьмем произвольные $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ и рассмотр 2-испытания $\mathfrak{A}^{(i)}$ с исходами $A_1^{(i)}: X_i < x_i$ и $A_2^{(i)}: X_i \geqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Очевидно, $\mathbf{P}(A_1^{(i)}) = x_i$. По условию, каков бы ни был вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ с нео рицательными компонентами, не превосходящими 1, существует такое 2^n-испытан е с исходами вида

$$A_{j_1}^{(1)} \cap A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)} \quad (j_i = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$

$$\mathbf{P}\left(A_{j_1}^{(1)} \cap A_{j_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}\right) = \varphi\left(\mathbf{P}\left(A_{j_1}^{(1)}\right), \mathbf{P}\left(A_{j_2}^{(2)}\right), \ldots, \mathbf{P}\left(A_{j_n}^{(n)}\right)\right), \tag{10}$$

в частности,

$$\mathbf{P}\left(X_1 < x_1 \cap X_2 < x_2 \cap \ldots \cap X_n < x_n\right) = \psi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

ким образом, ψ оказывается функцией распределения n-мерной случайной величины $, \ldots, X_n)$, для которой имеет место (2). Непрерывность ψ по каждому аргументу ла установлена выше.

Возьмем теперь произвольные 2-испытания $\mathfrak{A}^{(i)}$ с исходами $A_1^{(i)}$ и $A_2^{(i)}$ каждое. Тогда ществует такое 2^n-испытание $\mathfrak{A}$ с исходами вида (9), что имеет место (10). Пусть $A_1^{(i)}) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда ввиду (10) мы имеем (считая, для определенности, = 1)

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varphi(1 - x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \mathbf{P}\left(A_1^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap \ldots \cap A_1^{(n)}\right) + \mathbf{P}\left(A_2^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap \ldots \cap A_1^{(n)}\right) = \mathbf{P}\left(A_1^{(2)} \cap \ldots \cap A_1^{n}\right). \tag{11}$$

к как это справедливо для любой системы, состоящей из $n - 1$ 2-испытаний $\mathfrak{A}^{(2)}, \ldots$., $\mathfrak{A}^{(n)}$, то сумма, стоящая в (11) слева, есть некоторая функция $x_2, \ldots, x_n$, являющаяся в силу индуктивного предположения $(n - 1)$-мерной т. ф. р. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности возьмем n-мерную случайную величину $X_1, \ldots, X_n)$, имеющую функцией распределения некоторую n-мерную т. ф. р. φ. Каковы бы ни были 2-испытания $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ соответственно с исходами $A_1^{(i)}$ и $A_2^{(i)}$ $= 1, \ldots, n$), имеющими вероятности x_i и $1 - x_i$, мы можем интерпретировать исходы) как события $X < x_i$. Тогда, поскольку φ есть т. ф. р., $\mathbf{P}\left(A_{j_1}^{(1)} \cap \ldots \cap A_{j_n}^{(n)}\right) =$ $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$, где

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } j_i = 1, \\ 1 - x_i, & \text{если } j_i = 2 \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Теорема доказана.

Определение n-мерной т. ф. р. не является тривиальным, так как кроме произведения ществуют и другие т. ф. р. Например, в случае $n = 2$ такой функцией является

$$xy + \alpha \sin 2\pi x \sin 2\pi y \quad (0 \leqslant x,\ y \leqslant 1)$$

и достаточно малом α.

3. Далее мы будем пользоваться терминологией, употребляемой в [1].

Пусть M — некоторое множество, $\mathfrak{K}$ — регулярный комплекс его подмножеств, S_m — ечные множества, сопоставленные каждому $m \in M$, и $S_K = \prod_{m \in K} S_m$ для любого $K \subset M$. стему всех множеств S_K $(K \in \mathfrak{K})$ обозначим через $S_{\mathfrak{K}}$. Рассмотрим нормальный ряд

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_n \supset \mathfrak{K}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{K}_0 = \Lambda \tag{12}$$

мплекса $\mathfrak{K}$ и обозначим, как обычно, крайний остов $\mathfrak{K}_i$, которому соответствует нормальный подкомплекс $\mathfrak{K}_{i-1}$, через T_i $(i = 1, \ldots, n)$, и пусть $|\mathfrak{K}_{i-1}| \cap T_i = P_i$ $T_i \setminus P_i = R_i$.

Комплекс $\mathfrak{K}$, рассматриваемый совместно со своим нормальным рядом (12), будем зывать *упорядоченным комплексом* и обозначать $\mathfrak{K}^{\mathcal{V}}$.

Функция φ от n переменных, определенную для всех систем значений своих аргументов, лежащих в n-мерном единичном кубе, назовем $S_{\mathfrak{K}^{\mathcal{V}}}$-типом зависимости мер, если ково бы ни было внутреннее согласованное семейство мер $\mu_{\mathfrak{K}} = (\mu_K)_{K \in \mathfrak{K}}$ на множе-

ствах из $S_{\mathfrak{R}}$, существует такое его продолжение μ, что для любого $x \in S_M$

$$\mu(x) = \varphi(\mu_{T_1}(x_{T_1}),\ \mu_{T_2}(x_{R_2}|x_{P_2}), \ldots, \mu_{T_n}(x_{R_n}|x_{P_n})).$$

Функция, выражающая значение марковского продолжения мер через значения м продолжаемого семейства (см., напр., [1]), очевидно, является $S_{\mathfrak{R}}$-типом зависимост Мы будем называть его *марковским* типом зависимости.

Теорема 2. *Пусть каждое из множеств* $S_{\mathfrak{R}_{i_1}}, \ldots, S_{R_{i_l}}$ *содержит не менее* m *элементов, а каждое из остальных множеств* $S_{R_{k_1}}, \ldots, S_{R_{k_{n-l}}}$ *равно 2. Тогда д того, чтобы функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *являлась* $S_{\mathfrak{R}}$-*типом зависимости необходи и достаточно, чтобы она имела вид* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\ \psi(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-l}})$, *где* ψ *есть не торая* $(n-l)$*-мерная т. ф. р.*

В частности, если $n = l$, *то* φ *может быть только марковским относительно типом зависимости.*

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы и может быть опущено.

Таким образом, рассмотрение в теории игр именно марковских относительно ком лекса рандомизированных совместных действий игроков получает в дополнение к соде жательному обоснованию (см. [2]) еще и формальное подкрепление.

Поступила в редакц
24.8.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Воробьев, О коалиционных играх, ДАН СССР, **124**, 2 (1959), 253—256.
[2] Н. Н. Воробьев, Устойчивые ситуации в коалиционных играх, ДАН СССР, **131**, (1960), 493—495.
[3] J. Aczél, A solution of some problems of K. Borsuk and L. Jánossy, Acta Physi Acad. Sci. Hung, **4**, 4 (1955), 351—362.

AN ANALYTICAL CHARACTERIZATION OF INDEPENDENCE AND MARKOV TYPE DEPENDENCE

N. N. VOROBYEV (LENINGRAD)

(Summary)

In this article it is proved that a functional dependence between the probabilities f intersections of outcomes of trials and the probabilities for the outcomes themselves ca exist (all the exceptions are listed) only provided the trials are independent.

A like result is established for measures, which are Markov with respect to an arb trarily regular complex.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ИГРОВОГО ТИПА

И. В. РОМАНОВСКИЙ

1. Рассматриваемые здесь игры представляют собой модернизацию классической сх мы многошаговой игры — задачи о разорении игрока [1] и решавшейся Паскалем и Фе ма задачи о дележе ставок в неоконченной игре [2]. В рассматриваемых играх игрок (в отличие от классических схем) участвуют активно, выбирая на каждом шаге сво стратегии. Однако в отличие от игр такого рода, рассмотренных ранее ([3], [4], [5]), п ложение игроков в игре будет зависеть также и от случая.

2. Рассмотрим следующую игру двух лиц с постоянной суммой (далее мы будем рассматривать только такие игры). Пусть первый игрок имеет капитал r, второй — капитал $-r$. Первый игрок выбирает стратегию i, второй независимо выбирает стратегию j, после чего выигрыш первого игрока (проигрыш второго) в этой партии определяется как значение случайной величины ξ_{ij}, полученный игроком выигрыш прибавляется к его капиталу, и игра продолжается до тех пор, пока капитал одного из игроков не станет меньше или равен нулю. Выигрыш этого игрока равен нулю, а другого игрока — единице. Случайные величины ξ_{ij}, появляющиеся на различных шагах игры, мы считаем независимыми.

При изучении таких игр существенную помощь оказывает функциональное уравнение *

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{Val} \| \mathbf{E}\varphi(x + \xi_{ij}) \|, & 0 < x < R, \\ 1, & x \geqslant R. \end{cases} \tag{1}$$

Это объясняется тем, что если это уравнение имеет единственное решение, то значение игры существует и равно $\varphi(r_0)$, где r_0 — начальный капитал первого игрока.

Для единственности решения уравнения (1) достаточно, чтобы $\mathbf{P}(\xi_{ij} = 0) \neq 1$ при всех i и j (существование решения гарантировано всегда). Это единственное решение может быть получено как предел последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{Val} \| \mathbf{E}\varphi_{n-1}(x + \xi_{ij}) \|, & 0 < x < R; \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 1 & x \geqslant R, \end{cases}$$

где $\varphi_0(x)$ — неубывающая функция и $0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant 1$ при любом x. При этом выбор $\varphi_0(x) = h(x + 0)$ и $\varphi_0(x) = h(x - R - 0)$ ($h(x)$ — функция Хевисайда) обеспечивает монотонную сходимость соответственно сверху и снизу, и в этом случае для ускорения сходимости можно использовать метод Зейделя.

В случае $\operatorname{Val} \| \mathbf{P}(\xi_{ij} > 0) \| = 0$ мы имеем $\varphi(x) = h(x - R - 0)$, а в случае $\operatorname{Val} \| -\mathbf{P}(\xi_{ij} < 0) \| = 0$ имеем $\varphi(x) = h(x + 0)$. Это единственные случаи, когда единственное решение уравнения (1) непрерывно на каком-либо из концов промежутка $[0, R]$.

Для остальных, невырожденных, случаев можно построить оценки решения, используя функцию $\Phi(x, \lambda) = (e^{\lambda x} - 1)\dfrac{1}{\lambda}$, $(\Phi(x, 0) = x)$.

При надлежащем выборе $\lambda = \lambda_0$ и при условии, что $\mathbf{E}\exp(\lambda_0 \xi_{ij}) < \infty$ (здесь это условие несущественно, так как можно считать случайные величины ξ_{ij} лежащими в промежутке $[-R, R]$), эта функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(x) = \operatorname{Val} \| \mathbf{E}\varphi(x + \xi_{ij}) \| - \Phi(x, \lambda_0), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

причем $\operatorname{sgn} \lambda_0 = \operatorname{sgn} \operatorname{Val} \| \mathbf{E}\xi_{ij} \| \neq 0$. Если $\operatorname{Val} \| \mathbf{E}\xi_{ij} \| > 0$, то $\varphi(x) \geqslant |\lambda_0 \Phi(x, \lambda_0)|$ при $0 < x < R$, если же $\operatorname{Val} \| \mathbf{E}\xi_{ij} \| < 0$, то $\varphi(x) \leqslant |\lambda_0 \Phi(x, \lambda_0)|$, а в том случае, когда $\operatorname{Val} \| \mathbf{E}\xi_{ij} \| = 0$, существует такое l, не зависящее от R и $\| \xi_{ij} \|$, что

$$\frac{\Phi(x, 0)}{\Phi(R, 0) + l} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\Phi(x, 0) + l}{\Phi(R, 0) + l}.$$

При выводе этих оценок используется ограниченность случайных величин ξ_{ij}, поэтому они мало пригодны для изучения асимптотического поведения $\varphi(x)$ при $R \to \infty$, которое с помощью иных соображений исследуется ниже.

Отметим, наконец, что если все случайные величины ξ_{ij} имеют плотности распределения, то функция $\varphi(x)$ непрерывна при $0 < x < R$. Если же все эти плотности принадлежат классу Lip_L, то это решение абсолютно непрерывно.

3. Вариантом этой игры является схема, в которой один из игроков (для определенности второй) имеет бесконечный капитал. В этом случае функцию выигрыша естествен-

* $\operatorname{Val} A$ — значение игры с матрицей A.

но считать равной нулю, если второму игроку удается разорить первого, и единице противном случае. Сразу же заметим, что при $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| < 0$ второй игрок с вероятностью 1 разоряет первого. Для случая $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| = 0$ мы располагаем в настоящее время доказательством этого факта только при условии $\sum_{ij} \mathrm{E}\xi_{ij}^2 < \infty$. В случае же $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| < 0$ значение игры с начальным капиталом первого игрока r_0 (т. е. вероятность не разориться при использовании оптимальных стратегий обоими игроками) равно $\varphi(r_0)$, где $\varphi(x)$ — единственное решение уравнения

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \mathrm{Val} \| \mathrm{E}\varphi(x + \xi_{ij}) \|, & x > 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию $\varphi(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

Обозначим теперь $\varphi_R(x)$ решение уравнения (1). Тогда при любом $\varphi(x)/\varphi(R) \geqslant \varphi_R(x) \geqslant \varphi(x)$. Так как $\varphi(x) \to 1$ при $x \to \infty$, то $\varphi_R(x) \Rightarrow \varphi(x)$ при $R \to \infty$. Отсюда следует, что если $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| > 0$, то при $0 < \alpha < 1$ $\varphi_R(\alpha R) \to 1$. (Аналогично если $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| < 0$, то $\varphi_R(\alpha R) \to 0$).

Если же $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| = 0$, то при условии $\sum_{ij} \xi_{ij}^2 < \infty$ $\varphi_R(\alpha R) \to \alpha$ при $0 < \alpha < 1$

При доказательстве последнего утверждения используется тот факт, что в этих предположениях $R\lambda_R \to 0$ при $R \to \infty$, где λ_R — единственный корень уравнения

$$\mathrm{Val} \| 1 - \mathrm{E} \exp\{-\lambda \max(\xi_{ij}, R)\} \| = 0.$$

4. Случай, когда $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| < 0$ и первый игрок разоряется с вероятностью 1, представляет интерес с точки зрения другой целевой функции — времени разорения. Пусть выигрыш первого игрока равен времени его разорения. Как и прежде, рассмотрим функциональное уравнение

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 + \mathrm{Val} \| \mathrm{E}\psi(x + \xi_{ij}) \|, & x > 0. \end{cases}$$

Если $\mathrm{Val} \| \mathrm{E}\xi_{ij} \| = -a < 0$, то решение функционального уравнения (4) существует единственно, и $\psi(x) \geqslant x/a$ для $x > 0$. Если $\mathbf{P}(\xi_{ij} \geqslant -M) = 1$ для всех i, j, то кроме того, $\psi(x) \leqslant \dfrac{x+M}{a}$. Откуда следует, что всегда $\psi(x) = \dfrac{x}{a}(1 + o(1))$.

Если (4) имеет единственное решение $\psi(x)$, то значение игры при начальном капитале r_0 у первого игрока равно $\psi(r_0)$.

5. Рассмотренные нами игры можно считать случайными блужданиями на части прямой линии. Теперь мы перейдем к многомерным блужданиям. Игра будет состоять в следующем:

Состояние игры характеризуется точкой x, принадлежащей открытому выпуклому множеству D евклидова пространства E^n. Задана матрица $\| \xi_{ij} \|$, элементы которой суть n-мерные случайные величины (соответствующие им меры будут обозначаться μ_{ij}). На каждом шаге игры первый игрок выбирает строку матрицы i, второй — столбец j. В соответствии с тем, какое значение принимает случайный вектор ξ_{ij}, игра переходит в точку $x + \xi_{ij}$. Если эта точка принадлежит D, то игра продолжается по тем же правилам, а если нет, то игра заканчивается в той точке границы S множества D, которая лежит на отрезке $\overline{x, x + \xi_{ij}}$. На S задана ограниченная функция выигрышей первого игрока $K(x)$. Если игра окончилась в точке x, второй игрок платит первому $K(x)$.

Введем несколько обозначений. Пусть μ — вероятностная мера в E^n. Обозначим $\mu_x(A)$ меру $\mu(A + x)$, а $\tilde{\mu}_x$ — меру (не нормированную) на S, определяемую соотношением

ем (см. рис. 1):

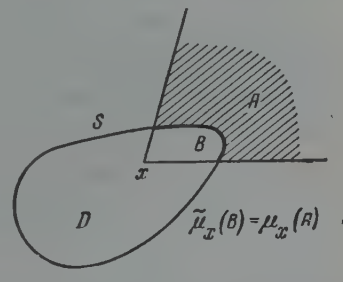
$$\widetilde{\mu}_x(B) = \mu_x\{y \mid y \notin D,\ \{x + \lambda(y-x) \mid \lambda \geqslant 0\} \cap B \neq \Lambda\} \text{ для } B \subset S,\ x \in D.$$

конец, меру на множестве $\overline{D}$, которая равна μ_x на D и $\widetilde{\mu}_x$ на S обозначим $\overline{\mu}(\cdot \mid x)$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{Val} \parallel \mathrm{E}_{\overline{\mu}_{ij}(\cdot \mid x)} \varphi(z) \parallel, & x \in D, \\ K(x), & x \in S. \end{cases} \tag{5}$$

Если множество D ограничено и существуют такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, а также вектор $a \neq 0$, о $\mu_{ij}\{(x, a) \geqslant \varepsilon_1\} \geqslant \varepsilon_2$, то игра заканчивается вероятностью 1, с какой бы точки x_0 внутри обла- я она ни начиналась, и выигрыш в этой игре вен $\varphi(x_0)$, где φ — решение уравнения (5), ко- рое в этом случае единственно.



Последнее условие является слишком сильным (оно гораздо сильнее, чем в одномерном случае). Однако его, по-видимому, нельзя ослабить, не налагая ограничений на характер менения функции $K(x)$. Если целевой функцией ового игрока является время игры, то условие ществования значения игры можно ослабить.

менно достаточно, чтобы существовали такая смешанная стратегия второго игрока q, кой вектор $c \neq 0$ и такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, чтобы при любой стратегии первого игрока p

$$\mathbf{P}\{(\xi_{pq}, c) > \varepsilon_1\} = p \parallel \mu_{ij}\{(x, c) > \varepsilon_1\} \parallel q \geqslant \varepsilon_2.$$

этом случае игра кончается с вероятностью 1, а среднее время игры равно $\psi(x_0)$, где (x) — единственное решение функционального уравнения

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{Val} \parallel \mathrm{E}_{\overline{\mu}_{ij}(\cdot \mid x)} \psi(z) \parallel, & x \in D, \\ 0, & x \in S. \end{cases}$$

Поступила в редакцию
10.1.61

ЛИТЕРАТУРА

А. А. Марков, Исчисление вероятностей, СПб., 1900.
P. Fermat, Varia opera mathematica, Tolosae, 1679.
R. Bellman, Decision making in the face of uncertainty. II. Naval Res. Log. Quart., 1 (1954), 323—332.
Р. Беллман, Динамическое программирование, М., ИЛ, 1960.
J. Milnor and L. Shapley, On games of survival, Contributions to the Theory of Games, Vol. III, Princeton Univ. Press, 1957.

GAME-TYPE RANDOM WALKS

I. V. ROMANOVSKY (LENINGRAD)

(Summary)

We discuss a random walk in a convex set of Euclidian space ruled by two opponents. They may as usual independently choose a row and a column of the matrix of even random vectors. The surface of this set absorbs a moving point, and the pay-off defined in absorbation points.

The determinateness of such games is proved with uniqueness theorems for Bellman-pe functional equations under a somewhat artificial condition (cf. (66)). Fro the one-dimensional case (which is a generalization of Bellman — Milnor — Shapley's «games of rvival») a more explicit analysis is given.

Absorbation time is also considered as an pay-off function both in one and multimensional cases.

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ПРОЦЕССА БРАУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

А. В. СКОРОХОД

Понятие аддитивного функционала от марковского процесса было введено Е. Б. Дынкиным (см., напр., [1, 2]). Неотрицательные аддитивные функционалы от непрерывных процессов Маркова описаны В. А. Волконским [3, 4]. В настоящей работе описан более широкий класс аддитивных функционалов, но только от процесса броуновского движения.

1. Основные определения и формулировка результата

Под процессом броуновского движения в m-мерном пространстве мы будем понимать однородный марковский процесс $w(t)$ с переходной функцией $P(t, x, A)$, определяемой для $t \geqslant 0$, $x \in R^{(m)}$ и борелевских множеств A из $R^{(m)}$ соотношением:

$$P(t, x, A) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_A \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}\right\} dy;$$

здесь $|x-y|$ — эвклидово расстояние в $R^{(m)}$. Будем обозначать $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{M}_x$ вероятность и математические ожидания процесса при условии, что $w(0) = x$. Процесс $w(t)$ будет строго марковским, с вероятностью 1, непрерывным процессом (см. [5], гл. 2, §§ 1, гл. 5, §§ 2,6; гл. 6, § 5).

Пусть C — пространство непрерывных функций, определенных на $[0, \infty]$ и принимающих значения из $R^{(m)}$, $\mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все подмножества C вида $\{x(t) \in A\}$, где $t \in [t_1, t_2]$, A — борелевское множество из $R^{(m)}$. Мы будем говорить, что определен аддитивный функционал $\eta_{[t_1, t_2]}$, если для всех $0 \leqslant t_1 < t_2$ определена случайная величина $\eta_{[t_1, t_2]}$, измеримая относительно $\mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$, причем для $t_1 < t_2 < t_3$, с вероятностью $\mathbf{P}_x = 1$, при любом x выполняется соотношение $\eta_{[t_1, t_3]} = \eta_{[t_1, t_2]} + \eta_{[t_2, t_3]}$. Этот функционал называется однородным, если для любого x и числа α, с вероятностью 1, выполняется равенство

$$\mathbf{P}_x\{\eta_{[t_1, t_2]} < \alpha \mid w(t_1)\} = \mathbf{P}_{w(t_1)}\{\eta_{[0, t_2 - t_1]} < \alpha\}.$$

Мы будем рассматривать только непрерывные, с вероятностью 1, функционалы, т. е. такие функционалы, для которых $\eta_{[t_1, t_2]}$ является, с вероятностью 1, непрерывной функцией t_1 и t_2. Для формулировки теоремы нам понадобится еще следующее условие:

(*) Для каждого $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует такое $T > 0$, что при $t \leqslant T$ и $|x| \leqslant C$ $\mathbf{P}_{(x)}\{|\eta_{[0, t)}| > \varepsilon\} < \delta$.

Теорема. *Если $\eta_{[t_1, t_2]}$ — аддитивный однородный непрерывный, с вероятностью 1, функционал, для которого выполнено условие* (*), *то существуют такая измеримая числовая, ограниченная на каждом компакте функция $V(x)$ и такая измеримая принимающая значения $R^{(m)}$ функция $U(x)$, что: для каждого $C > 0$ $\int_{|x| \leqslant C} |U(x)|^2 dx < \infty$, обе функции определены на $R^{(m)}$, для всех x и $0 \leqslant t_1 < t_2$, с вероятностью $\mathbf{P}_x = 1$,*

$$\eta_{[t_1, t_2]} = V(w(t_2)) - V(w(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} (U(w(s)), dw(s)),$$

Если имеется другое представление $\eta_{[t_1, t_2]}$ *в виде* (1) *с функциями* $V_1(x)$ *и* $U_1(x)$, *о почти для всех* x

$$\Delta(V(x) - V_1(x)) = 0, \quad U(x) - U_1(x) = -\operatorname{grad}(V - V_1).$$

При этом

$$\int_{t_1}^{t_2} (U(w(s)), dw(s)) = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} U^i(w(s))\, dw^i(s),$$

де U^i *и* w^i *— компоненты векторов* U, w *в некоторой ортогональной системе координат в* $R^{(m)}$, *а интегралы по* $dw^i(s)$ *являются интегралами Ито* [6].

Доказательству этой теоремы посвящены пункты 2—5 работы. Здесь мы отметим только следующее. Можно считать, что процесс $w(t)$ является компонентой (возможно многомерной) процесса броуновского движения в пространстве большего числа измерений. Нам часто будет удобно предполагать, что размерность пространства $R^{(m)}$ не менее 7. Во-вторых, нам достаточно найти вид процесса $\eta_{[0, t]}$.

2. Сведение к случаю существования моментов

Мы будем рассматривать здесь процессы $\eta(t) = \eta_{[0, t]}$, где $\eta_{[t_1, t_2]}$ — аддитивный функционал, удовлетворяющий условиям теоремы. Оказывается, что такие процессы можно, меняя их значения на множестве траекторий сколь угодно малой меры $\mathbf{P}_x$ для всех x з некоторого компактного множества, превращать в процессы, для которых существуют се моменты.

Лемма 1. *Для всех* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *и* $c > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что*

$$\sup_{|x| \leqslant C} \mathbf{P}_x \{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |\eta(t)| > \varepsilon_1 \} < \varepsilon_2.$$

Доказательство

$$\mathbf{P}_x \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |\eta(t)| > \varepsilon_1 \right\} \leqslant \mathbf{P}_x \{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |w(t) - x| > c \} + \mathbf{P}_x \left\{ |\eta(\delta)| > \frac{\varepsilon_1}{2} \right\} +$$

$$+ \mathbf{P}_x \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |\eta(t)| > \varepsilon_1, \ |\eta(\delta)| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}, \ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |w(t) - x| \leqslant c \right\}.$$

Пусть τ_1 — момент первого достижения процессом $\eta(t)$ одного из значений $-\varepsilon_1$ или $_1$. Тогда

$$\mathbf{P}_x \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |\eta(t)| > \varepsilon_1, \ |\eta(\delta)| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}, \ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |w(t) - x| \leqslant c \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_x \left\{ \tau_1 < \delta, \ |\eta(\delta) - \eta(\tau_1)| > \frac{\varepsilon_1}{2}, \ |w(\tau_1)| \leqslant 2c \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}_x \mathbf{P}_x \left\{ |\eta(\delta) - \eta(\tau_1)| > \frac{\varepsilon_1}{2} \,|\, w(\tau_1), \tau_1 \right\} \psi_{2c}(|w(\tau_1)|)\, \psi_\delta(\tau_1),$$

де

$$\psi_a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, a]; \\ 0, & t \in [0, a]. \end{cases}$$

Так как $w(t)$ — процесс строго марковский, $\eta(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_{[0, t]}$ и $\eta(s) - \eta(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_{[t, s]}$ при $s > t$, то, используя теорему 5, 4 [5], можно записать

$$\mathbf{M}_x \mathbf{P}_x \left\{ |\eta(\delta) - \eta(\tau_1)| > \frac{\varepsilon}{2} \,|\, w(\tau_1), \tau_1 \right\} \psi_{2c}(|w(\tau_1)|)\, \psi_\delta(\tau_1) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|\lambda| \leqslant 2c \\ 0 \leqslant s \leqslant \delta}} \mathbf{P}_\lambda \left\{ |\eta(s)| > \frac{\varepsilon_1}{2} \right\}.$$

Таким образом, $\sup_{|x|\leqslant c} \mathbf{P}_x \{ \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta} |\eta(t)| > \varepsilon_1 \} \leqslant \sup_{|x|\leqslant c} \mathbf{P}_x \{ \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta} |w(t) - x| > c \} +$

$+ 2\sup_{\substack{|\lambda|\leqslant 2c \\ 0\leqslant t\leqslant\delta}} \mathbf{P}\left\{ |\eta(t)| > \frac{\varepsilon_1}{2} \right\}$. Из этого неравенства вытекает доказательство леммы.

Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Рассмотрим $\int_0^t \varphi(w(s))\, d\eta(s)$, определенный как предел по вероятности сумм

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(w(t_k))\,[\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})],$$

если $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, $\max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0$. Существование предела этих сумм вытекает из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(w(t_k))\,[\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})] = \varphi(w(t))\,\eta(t) - \sum_{k=1}^{n} \eta(t_{k-1})\,[\varphi(w(t_k)) - \varphi(w(t_{k-1}))].$$

Из последнего соотношения вытекает формула:

$$\int_0^t \varphi(w(s))\, d\eta(s) = \varphi(w(t))\,\eta(t) - \int_0^t (\eta(s)\,\operatorname{grad}\varphi(w(s)),\ dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta(s)\,\Delta\varphi(w(s))\, ds.$$

Мы воспользовались формулой Ито для стохастических дифференциалов

$$d\varphi(w(s)) = (\operatorname{grad}\varphi(w(s)),\ dw(s) + \frac{1}{2}\Delta\varphi(w(s))\, dt, \qquad (2$$

установленной в [7]).

Лемма 2. *Определив*

$$\eta^*_{[t_1,\,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(w(s))\, d\eta(s),$$

мы получим аддитивный однородный непрерывный, с вероятностью 1, *функционал; если* $\varphi(x)$, $\Delta\varphi(x)$ *и* $|\operatorname{grad}\varphi(x)|$ *ограничены, то для этого функционала будет выполняться условие* (V); *если* $\varphi(x) = 1$ *при* $|x| \leqslant c$, *и* τ — *момент первого достижения процессом* $w(t)$ *множества* $\{|x| \geqslant c\}$, *то при* $t < \tau$ $\eta^*(t) = \eta(t)$, *где* $\eta^*(t) = \eta^*_{[0,\,t]}$.

В доказательстве нуждается лишь тот факт, что для $\eta^*(t)$ выполняется условие (*. Пусть $\eta_1(s) = \eta(s)$, если $\sup_{u\leqslant s} |\eta(u)| < \varepsilon_1$, и $\eta(s) = 0$ в противном случае. Тогд

$$\mathbf{P}_x \left\{ \left| \int_0^t (\eta(s)\,\operatorname{grad}\varphi(w(s)),\ dw(s)) \right| > \varepsilon \right\} + \mathbf{P}_x \{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\eta(s)| > \varepsilon_1 \} +$$

$$+ \mathbf{P}_x \left\{ \left| \int_0^t (\eta_1(s)\,\operatorname{grad}\varphi(w(s)),\ dw(s)) \right| > \varepsilon \right\} \leqslant \mathbf{P}_x \{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\eta(s)| > \varepsilon_1 \} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbf{M}_x \left[\int_0^t (\eta(s)\,\operatorname{grad}\varphi(w(s)),\ dw(s)) \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_x \{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\eta(s)| > \varepsilon_1 \} + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbf{M}_x\, |\operatorname{grad}\varphi(w(s))|^2\, ds.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\mathbf{P}_x \left\{ \left| \int_0^t \eta(s)\,\Delta\varphi(w(s))\, ds \right| > \varepsilon \right\} \leqslant \mathbf{P}_x \left\{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\eta(s)| > \varepsilon_1 \right\} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{M}_x\, |\Delta\varphi(w(s))|\, ds.$$

Лемма 3. *Пусть процесс* $\eta^*(t)$ *построен как и в предыдущей лемме, и функция* $\varphi(x)$ *такова, что* $\varphi(x) = 0$ *при* $|x| > c$. *Тогда процесс* $\eta^*(t)$ *имеет моменты всех порядков, и для любых* r *и* T *существует такое* L_r, *что*

$$\mathbf{M}_x |\eta^*(t)|^r \leqslant L_r P_x \{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |w(s) - x| > |x| - c \} \text{ при } t \leqslant T.$$

Доказательство. Заметим, что при $|x| > c$

$$\mathbf{P}_x \{|\eta^*(t)| > 0\} \leqslant \mathbf{P}_x \{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |w(s) - x| > |x| - c \}.$$

Этому для процесса η^* условие (*) выполняется равномерно по всем x, т. е. для каждого ε_1 и ρ_1 существует такое $\delta > 0$, что при $t \leqslant \delta$ $\mathbf{P}_x \{|\eta^*(t)| > \varepsilon_1\} < \rho_1$ для всех x. Следовательно, на основании леммы 1, мы можем утверждать существование для каждого ε и ρ_1 такого δ_1, для которого при всех x $\mathbf{P}_x \{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta_1} |\eta^*(t)| > \varepsilon_1 \} < \rho_1$.

Обозначим τ_1 такой момент времени, что $|\eta^*(\tau_1)| = \varepsilon_1$, а при $s < \tau_1$ $|\eta^*(s)| < \varepsilon_1$. Тогда при $t < \delta_1$

$$\mathbf{P}_x \{|\eta^*(t)| > 2\varepsilon_1\} = \mathbf{P}_x \{\tau_1 < t,\ |\eta^*(t) - \eta^*(\tau_1)| > \varepsilon_1\} =$$

$$= \mathbf{M}_x \mathbf{P}_x \{|\eta^*(t) - \eta^*(\tau_1)| > \varepsilon_1 \mid \tau,\ w(\tau)\}\, \psi_t(\tau_1) \leqslant \rho_1 \mathbf{M}_x \psi_t(\tau_1) \leqslant \rho_1^2, \tag{3}$$

десь $\psi_t(s)$ — характеристическая функция $(0, t)$.

При выводе последнего неравенства мы воспользовались теоремой 5.4 из [5]. Аналогично устанавливается, что при $t < \delta_1$ $\mathbf{P}_x \{|\eta^*(t)| > k\varepsilon_1\} \leqslant \rho_1^k$. Поэтому $\mathbf{M}_x |\eta^*(t)|^r \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^r (\rho_1)^{k-1}$. Отсюда вытекает, что для каждых r и T существует такое L_r, что для всех $t \leqslant T$ и x $\mathbf{M}_x |\eta^*(t)|^r \leqslant L_r$. Заметим теперь, что если $|x| > c$, а τ—момент первого достижения процессом $w(t)$ множества $\{|x| \leqslant c\}$, то $\eta^*(t) = \eta^*(t) - \eta^*(\tau)$ при $t > \tau$, $\eta^*(t) = 0$ при $t \leqslant \tau$. Поэтому

$$\mathbf{M}_x |\eta^*(t)| \leqslant \mathbf{M}_x \mathbf{M}_x \{|\eta^*(t) - \eta^*(\tau)|^r \mid \tau,\ w(\tau)\}\, \psi_t(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant L_r \mathbf{M}_x \psi_t(\tau) \leqslant L_r \mathbf{P}_x \{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |w(s) - x| > |x| - c \}.$$

Лемма доказана.

3. О решениях некоторого интегрального уравнения

В этом пункте мы рассмотрим функции $z(t, x)$, определенные при $t \geqslant 0$, $x \in R^{(m)}$ измеримые, ограниченные на каждом компакте, удовлетворяющие при $0 < s < t$ уравнению:

$$z(t, x) = z(s, x) + \int p_s(y - x)\, z(t - s, y)\, dy, \tag{4}$$

где $p_s(y)$ — плотность распределения $w(s)$ при условии $w(0) = 0$. Всюду мы будем предполагать, что размерность пространства R не менее 7.

Лемма 4. *Пусть* $z(t, x)$ *непрерывно по* t *и для всех* T

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int \frac{|z(t, x)|^2}{1 + |x|^2}\, dx < \infty, \quad \sup_x \frac{|z(t, x)|}{1 + |x|} < \infty.$$

Тогда существует такое $a(x)$, *удовлетворяющее неравенству* $\sup_x |a(x)|\,(1 + |x|)^{-1} < \infty$, *что*

$$z(t, x) = \int a(y)\, p_t(x - y)\, dy - a(x). \tag{5}$$

Если при некотором t_0 $\int |z(t_0, x)|\, dx < \infty$, *то можно* $a(x)$ *выбрать так, чтобы*

для всех $p > \dfrac{m}{m-2}$

$$\int |a(x)|^p\,dx < \infty.$$

Доказательство. Пусть

$$a(t, x) = -z(t, x) - \sum_{k=1}^{\infty} \int p_{kt}(y-x)\, z(t, y)\, dy.$$

Ряд в правой части сходится равномерно, так как

$$\left|\int p_{kt}(y-x)\, z(t, y)\, dy\right| \leqslant \sqrt{\left(\int (1+|y|^2)\,(p_{kt}(y-x))^2\, dy\right)\int \frac{|z(t, u)|^2}{1+|y|^2}\,dy} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(1+|x|^2)\int p_{kt}(y^2)\,dy + \int |y-x|^2\, p_{kt}(y-x)^2\,dy} \times$$

$$\times \sqrt{\int \frac{|z(t, y)|^2}{1+|y|^2}\cdot dy} = O\left(\sqrt{1+|x|^2}\,(kt)^{-\frac{m-2}{4}}\right),$$

а $m \geqslant 7$ по условию. Из этих неравенств вытекает, что $|a(t, x)| = O\Bigg(\sqrt{1+|x|^2}$

$\times \sum_{k=1}^{\infty} (kt)^{-\frac{m-2}{4}}\Bigg)$. Легко проверить, что

$$z(t, x) = \int p_t(y-x)\, a(t, y)\, dy - a(t, x).$$

Можно показать, опираясь на очевидную лемму 5, что соотношение (5) имеет м
сто, если вместо $a(x)$ подставить $a(t_0, x)$, каково бы ни было $t_0 > 0$.

Лемма 5. *Если* $|V(x)| \leqslant L(1+|x|)$ *и при некотором* t_0

$$V(x) = \int p_{t_0}(x-y)\, V(y)\, dy,$$

то при всех t

$$V(x) = \int p_t(x-y)\, V(y)\, dy.$$

4. Случай существования моментов

Мы будем рассматривать процесс $\eta^*(t)$, удовлетворяющий условиям леммы 3. Пол
жим $z(t, x) = \mathbf{M}_x \eta^*(t)$. Тогда при $s < t$

$$z(t, x) = \mathbf{M}_x \eta^*(s) + \mathbf{M}_x \mathbf{M}_x (\eta^*(t) - \eta^*(s) \mid w(s)) =$$

$$= z(s, x) + \int p_s(x-y)\, z(t-s, y)\, dy.$$

Кроме того, как вытекает из леммы 3, $z(t, x)$ — ограниченная функция, стремящаяся
нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Поэтому из леммы 4 вытекает суще
ствование такой функции $V(x)$, что

$$z(t, x) = \int V(y)\, p_t(x-y)\, dy - V(x).$$

Так как $\int |z(t, x)|\,dx < \infty$, то можем считать, что $\int |V(x)|^2\,dx < \infty$. Легко убеди
ся, что функция $z(t, x)$ будет при этом ограничена. Положим теперь

$$\zeta^*(t) = \eta^*(t) - [V(w(t)) - V(w(0))].$$

Отметим, что процесс $\zeta^*(t)$ также порождает аддитивный однородный функционал
процесса брауновского движения:

$$\zeta^*_{[t_1, t_2]} = \zeta^*(t_2) - \zeta^*(t_1),$$

и этом $\mathbf{M}_x\zeta^*(t) = 0$, а значит, при любом x

$$\mathbf{P}_x\{\mathbf{M}_x(\zeta^*(t_2) - \zeta^*(t_1) \mid w(t_1)) = 0\} = 1.$$

ложим $z_1(t, x) = \mathbf{M}_x w(t)\,\zeta^*(t)$. Тогда

$$|z_1(t, x)| = |\mathbf{M}_x\eta^*(t)\,w(t) + \mathbf{M}_x V(w(t))\,w(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\mathbf{M}_x\eta^*(t)^2\mathbf{M}_x \mid w(t)\mid^2} + \sqrt{\mathbf{M}_x \mid V(w(t))\mid^2 \mathbf{M}_x \mid w(t)\mid^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{|x|^2 + mt}\left(\sqrt{\mathbf{M}_x\eta^*(t)^2} + \sqrt{\mathbf{M}_x \mid V(w(t))\mid^2}\right).$$

этому

$$\int \frac{|z_1(t, x)|^2}{1 + |x|^2}\,dx \leqslant 2\int \frac{|x|^2 + mt}{|x|^2 + 1}\,[\mathbf{M}_x\eta^*(t)^2 + \mathbf{M}_x V(w(t))^2]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1 + mt)\int \mathbf{M}_x\eta^*(t)^2\,dx + (1 + mt)\iint p_t(x - y)\,V^2(y)\,dy\,dx =$$

$$= (1 + mt)\int \mathbf{M}_x\eta^*(t^2)\,dx + (1 + mt)\int V^2(y)\,dy.$$

уществование $\int \mathbf{M}_x\eta^*(t)^2\,dx$ вытекает из того, что $\mathbf{M}_x\eta^*(t)^2 \to 0$ при $|x| \to 0$ быстрее обой степени $|x|^{-1}$. Легко проверяется, что $z_1(t, x)$ удовлетворяет соотношению:

$$z_1(t, x) = z_1(s, x) + \int p_s(x - y)\,z(t - s, y)\,dy,\quad 0 < s < t.$$

ледовательно, существует такое $V_1(x)$, что

$$z_1(t, x) = \int p_t(x - y)\,V_1(y)\,dy - V_1(x).$$

оложим

$$z_1^{(\varepsilon)}(t, x) = \mathbf{M}_x[\zeta^*(t + \varepsilon) - \zeta^*(\varepsilon)] = \int z_1(t, y)\,p_\varepsilon(x - y)\,dy,$$

огда

$$z_1^{(\varepsilon)}(t, x) = \int p_t(x - y)\,V_1^{(\varepsilon)}(y)\,dy - V_1^{(\varepsilon)}(x),$$

де

$$V_1^{(\varepsilon)}(x) = \int p_\varepsilon(x - y)\,V_1(y)\,dy.$$

Введем теперь в C отображения $T_z x(t) = z + x(t)$, определенные для каждого $z \in R^{(m)}$. ти отображения измеримы относительно $\mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$ при любых $t_1 < t_2$. Какова бы ни была лучайная величина η, измеримая относительно $\mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$, можно рассмотреть случайную величину $T_z\eta$, которая также будет измерима относительно $\mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$. Пусть $\mathfrak{M}_{[t_1, t_2]} = \mathfrak{B}_m \times \mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$, где $\mathfrak{B}_m$ — σ-алгебра борелевских множеств $R^{(m)}$. Так как $T_z x(t)$ измерима относительно $\mathfrak{M}_{[t_1, t_2]}$, то и для всякой величины η, измеримой относительно $\mathfrak{F}_{[t_1, t_2]}$, $T_z\eta$ удет измерима относительно $\mathfrak{M}_{[t_1, t_2]}$. Мы будем называть случайную величину η регулярной, если $T_z\eta$ стохастически асимптотически непрерывно по z относительно вероятности $\mathbf{P}_x$ при любом x. Отметим без доказательства некоторые достаточные условия регулярности случайных величин.

Лемма 6. *Пусть величина η измерима относительно $\mathfrak{F}_{[\delta, \infty]}$, $\delta > 0$, тогда η регулярна.*

Лемма 7. *Пусть для каждого $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $c > 0$ существует величина η_δ, измеримая относительно $\mathfrak{F}_{[\delta, \infty]}$, $\delta > 0$, такая что $\mathbf{P}_x\{|\eta - \eta_\delta| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$ при $|x| \leqslant c$. Тогда η — регулярная случайная величина.*

Положим $\zeta_\varepsilon^*(t) = \int p_\varepsilon(y)\,T_y\zeta^*(t)\,dy$. Имеет место

Лемма 8. *При $\varepsilon \to 0$ $\zeta_\varepsilon^*(t) \to \zeta^*(t)$, по вероятности.*

Действительно, $\int p_\varepsilon(y)\, T_y \eta^*(t)\, dy \to \eta^*(t)$, так как $\eta^*(t)$ является регулярной вел
чиной, ввиду условия (*). Далее,

$$\int p_\varepsilon(y)\, T_y V(w(t))\, dy = \int p_\varepsilon(y)\, V(y + w(t))\, dy \to V(w(t))$$

при $\varepsilon \to 0$, так как при $\varepsilon \to 0$

$$\int p_\varepsilon(y)\, V(y + x)\, dy - V(x) = \mathbf{M}_x \eta^*(\varepsilon)\, w(\varepsilon) \to 0.$$

Лемма доказана.

Легко видеть, что при $t_1 < t_2$

$$\mathbf{P}_x\{\mathbf{M}_x\{\zeta_\varepsilon^*(t_2) - \zeta_\varepsilon^*(t_1) \mid w(t_1)\} = 0\} = 1 \text{ и } \mathbf{M}_x \zeta_\varepsilon^*(t)\, w(t) = z_1^{(\varepsilon)}(t, x).$$

Функция $V_1^{(\varepsilon)}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Поэтому, если $U_1^{(\varepsilon)}(x) = \Delta V_1^{(\varepsilon)}(x$
то

$$\mathbf{M}_x\left[\zeta_\varepsilon^*(t) - \int_0^t (U_1^\varepsilon(w, (s)), dw(s))\, w(t)\right] = z_1^{(\varepsilon)}(t, x) - \frac{1}{2}\mathbf{M}_x \int_0^t \Delta V_1^{(\varepsilon)}(w(s))\, ds =$$

$$= \mathbf{M}_x\left[V_1^{(\varepsilon)}(w(t)) - V_1^{(\varepsilon)}(w(0)) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta V_1^{(\varepsilon)}(w(s))\, ds\right] = \mathbf{M}_x \int_0^t (\operatorname{grad} V_1^{(\varepsilon)}(s), dw(s)) =$$

(здесь мы воспользовались опять формулой (2), операторы Δ и grad применяются к ка
дой компоненте вектора $V_1^{(\varepsilon)}$).

Лемма 9. *Пусть аддитивный однородный функционал $\chi_{[t_1, t_2]}$ таков, что дл
всех x $\mathbf{M}_x \chi_{[0,t]} w(t) = 0$, $M_x \chi_{[0,t]} = 0$. Тогда $\mathbf{P}_x\{\chi_{[0,t]} = 0\} = 1$ для всех x.*

Доказательство. Обозначим независимые компоненты $w(t)$ через $w^{(1)}(t)$, .
. . ., $w^{(m)}(t)$. Тогда из формулы (2) вытекает, что

$$[w^{(1)}(t)]^{k_1} \ldots [w^{(m)}(t)]^{k_m} = \int_0^t \sum_{i=1}^m k_i\, [w^{(1)}(s)]^{k_1} \ldots [w^{(m)}(s)]^{k_m} \frac{dw(s)}{w^{(i)}(s)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^m k_i (k_i - 1)\, [w^{(1)}(s)]^{k_1} \ldots [w^{(m)}(s)]^{k_m} \frac{ds}{[w^{(i)}(s)]^2}.$$

По индукции легко вывести равенство

$$\mathbf{M}_x \chi_{[0,t]} [w^{(1)}(t)]^{k_1} \ldots [w^{(m)}(t)]^{k_m} = 0.$$

Поэтому для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ $\mathbf{M}_x \chi_{[0,t]} \varphi(w(t)) = 0$.
Если теперь $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leqslant t$, а $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ — непрерывные ограниче
ные функции, то

$$\mathbf{M}_x \chi_{[0,t]} \varphi_1(w(t_1)) \ldots \varphi_N(w(t_N)) = 0,$$

поскольку

$$\mathbf{M}_x \chi_{[0,t]}\, \varphi_1(w(t_1)) \ldots \varphi_N(w(t_N)) = \mathbf{M}_x \chi_{[0,\, t_N]}\, \varphi_1(w(t_1)) \ldots \varphi_N(w(t_N)) =$$

$$= \mathbf{M}_x \chi_{[0,\, t_{N-1}]}\, \varphi_1(w(t_1)) \ldots \varphi_N(w(t_N)) =$$

$$= \mathbf{M}_x \chi_{[0,\, t_{N-1}]}\, \varphi_1(w(t_1)) \ldots \varphi_{N-1}(w(t_{N-1}))\, \mathbf{M}_x(\varphi(w(t_N)) \mid w(t_{N-1})) \text{ и т. д.}$$

Лемма доказана.

Из леммы 9 следует, что

$$\mathbf{P}_x\left\{\zeta_\varepsilon^*(t) - \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta V_1^{(\varepsilon)}(w(s)),\ dw(s) = 0\right\} = 1,$$

к как

$$\mathbf{M}_x\left[\zeta_\varepsilon^*(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta V_1^{(\varepsilon)}(w(s)),\ dw(s))\right] w(t) = 0.$$

пользуя сходимость $\zeta_\varepsilon^*(t)$ к $\zeta^*(t)$ при $\varepsilon \to 0$ и ограниченность моментов $\zeta_\varepsilon^*(t)$, можем едиться, что

$$\mathbf{M}_x\,|\,\zeta_\varepsilon^*(t) - \zeta^*(t)\,|^2 \to 0.$$

ледовательно,

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int_0^t \mathbf{M}_x\,|\,\Delta V_1^{(\varepsilon_1)}(w(s)) - \Delta V_1^{(\varepsilon_2)}(w(s))\,|^2\,ds = 0,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int_0^t \int p_s(y-x)\,|\,\Delta V_1^{(\varepsilon_1)}(y) - \Delta V_1^{(\varepsilon_2)}(y)\,|^2\,dy\,ds = 0.$$

этому существует такая функция $U(x)$, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \int p_s(y-x)\,|\,U(y) - \Delta V_1^{(\varepsilon)}(y)\,|^2\,dy\,ds = 0$$

и каждом x. Тогда при каждом x

$$\int_0^t (\Delta V_1^{(\varepsilon)}(w(s)),\ dw(s)) \to \int_0^t (U(w(s)),\ dw(s)),$$

вероятности $\mathbf{P}_x$. Откуда

$$\eta^*(t) = \int_0^t (U(w(s)),\ dw(s)) \text{ и } \eta^*(t) = V(w(t)) - V(w(0)) + \int_0^t (U(w(s)),\ dw(s)).$$

5. Общий случай

Пусть аддитивный функционал $\eta_{[t_1,t_2]}$ удовлетворяет условиям теоремы и $\eta(t) = \eta_{[0,t]}$. огда для всякого $c > 0$ можно построить аддитивный функционал $\eta_c[t_1, t_2]$, также довлетворяющий условиям теоремы, такой, что процесс $\eta_c(t) = \eta_c[0, t]$ имеет конечные оменты всех порядков и, если τ_c —момент первого достижения процессом $w(t)$ множества $x\,|\geqslant c\}$, то $\eta_c(t) = \eta(t)$ при $t \leqslant \tau_c$; при этом $\eta_c(t)$ имеет вид:

$$\eta_c(t) = V_c(w(t)) - V_c(w(0)) + \int_0^t (U_c(w(s)),\ dw(s)), \tag{7}$$

де функции $U_c(x)$ измеримы и ограничены, а для $U_c(x)$ выполняется неравенство:

$$\mathbf{M}_x \int_0^t |\,U_c\,|\,w(s))\,|^2\,ds < \infty.$$

Очевидно, что $\eta(t) = \lim_{c\to\infty} \eta_c(t)$, с вероятностью $\mathbf{P}_x = 1$. Если $c_1 < c_2$, то при $t < \tau_{c_1}$ $_x\{\eta_{c_2}(t) - \eta_{c_1}(t) = 0\} = 1$. Пусть $w_{c_1}(t) = w(t)$ при $t < \tau_{c_1}$, $w_{c_1}(t) = w(\tau_{c_1})$ при $t \geqslant \tau_{c_1}$.

Тогда, если $P_x(c_1, t, dy)$ — условное распределение $w_{c_1}(t)$ при условии $w_{c_1}(0)$, то

$$V_{c_1}(x) - V_{c_2}(x) = \int P_x(c, t, dy)\,[V_{c_1}(y) - V_{c_2}(y)],$$

так что при $|x| < c_1$ $\Delta[V_{c_1}(x) - V_{c_2}(x)] = 0$.

Пусть теперь последовательность $c_n \to \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, а $\Phi_n(x)$—гармонические всем пространстве функции такие, что при $|x| < c_n$

$$|V_{c_{n+1}}(x) - V_{c_n}(x) - \Phi_n(x)| < \varepsilon_n.$$

Существование такой функции вытекает из того, что разность $V_{c_{n+1}}(x) - V_{c_n}(x)$ сфере $|x| = c_n$ непрерывна и может быть представлена с точностью до ε_n линейно комбинацией сферических функций (см. [8], стр. 240—242), а сферические функции мож но продолжить со сферы $|x| = c_n$ гармонически на все пространство; если Φ_n так продолжение, то $|V_{c_{n+1}}(x) - V_{c_n}(x) - \Phi_n(x)| < \varepsilon_n$ при $|x| = c_n$, а значит, и дл всех x, для которых $|x| < c_n$. Последовательность $V_{c_{n+1}}(x) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x)$ сходит равномерно на каждом компакте к некоторой функции $V(x)$. Используя это обстоятел ство, можно показать, что существует функция $U(x)$ такая, что интеграл

$$\int_0^t (U_{c_{n+1}}(w(s)) - \operatorname{grad} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(w(s)),\ dw(s))$$

сходится, по вероятности, к $\int_0^t (U(w(s)),\ dw(s)$. Так как $\eta_c(t)$ сходится, по вероятности, $\eta(t)$, то, учитывая (7) и (2), получаем (1). Пусть теперь $\overline{V}(x)$ и $\overline{U}(x)$—две функции, удо летворяющие условиям теоремы, для которых также

$$\eta(t) = \overline{V}(w(t)) - \overline{V}(w(0)) + \int_0^t (\overline{U}(w(s)),\ dw(s)).$$

Тогда

$$V(w(t)) - \overline{V}(w(t)) - V(w(0)) + \overline{V}(w(0)) + \int_0^t (\overline{U}(w(s)) - U(w(s)),\ dw(s)) = 0,$$

так что $M_x[V(w^{(N)}(t)) - \overline{V}(w^{(N)}(t))] = V(x) - \overline{V}(x)$. Поэтому $V(x) - \overline{V}(x)$ гармонич при $|x| \leqslant N$, каково бы ни было N. Далее, для всех N

$$0 = \int_0^t \chi^{(N)}(s)\,[U(w(s)) - \overline{U}(w(s)) + \operatorname{grad}(V(w(s)) - \overline{V}(w(s)))]\,dw(s),$$

отсюда,

$$\int_0^t \int P_s(y - x)\,|U(x) - \overline{U}(x) + \operatorname{grad}(V(x) - \overline{V}(x))|^2\,dx\,ds = 0,$$

и, значит, $U(x) - \overline{U}(x) = \operatorname{grad}(\overline{V}(x) - V(x))$ почти для всех x. Теорема доказана.

Замечание. Стохастические интегралы, которые встречаются в этой статье, счи таются определенными таким образом, что их значения не зависят от выбора меры P. Возможность такого определения обоснована в работе Е. Б. Дынкина [2].

Поступила в редакцию
2.2.61

ЛИТЕРАТУРА

Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и связанные с ними задачи анализа, Успехи матем. наук, **15**, 2 (1960), 3—24.
Е. Б. Дынкин, Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами, Теория вероят. и ее примен. **V**, 4 (1960), 441—452.
В. А. Волконский, Аддитивные функционалы от марковских процессов, ДАН СССР, **127** (1959), 735—738.
В. А. Волконский, Аддитивные функционалы от марковских процессов, Труды моск. матем. о-ва, **9** (1960).
Е. Б. Дынкин, Основы теории процессов Маркова, М., Физматгиз, 1959.
K. Ito, Stochastic differential equations, Mem. Am. Math. Soc., **4** (1951), 1—51.
K. Ito, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math., J., **3** (1951), 55—65.
Erdelyi, Magnus, Tricomi, Higher trancendental functions, v. 2, Toronto—London, 1953.

ADDITIVE FUNCTIONALS OF THE BROWNIAN MOVEMENT PROCESS

A. V. SKOROHOD (KIEV)

(Summary)

It is established in the article that the additive functional of the Brownina movement ocess under certain general conditions is determined by formula (1).

ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОДНОМЕРНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

А. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

Рассмотрим непрерывный строго марковский процесс на отрезке $[r_1, r_2]$, регулярный не обрывающийся в интервале (r_1, r_2). Как известно (см. [1]), такой процесс характеризуется двумя возрастающими функциями u и v на (r_1, r_2) и константами, задающими оведение процесса на границах. Задача состоит в том, чтобы доказать, что переходные вероятности $P(t, x, \Gamma)$ этого процесса являются абсолютно непрерывными относительно v внутри трезка, и описать поведение этих вероятностей, когда $x = r_j$ или $\Gamma \ni r_j$. Из результатов] следует, что в случае, когда обе границы достижимы изнутри, все рассматриваемые роцессы феллеровские; если же одна из границ, r_j, недостижима изнутри, существует овно одна совокупность констант на этой границе, обеспечивающая феллеровские свойства процесса. При этом, если $x \neq r_j$, то $P(t, x, \Gamma)$ для нефеллеровского процесса и оответствующего феллеровского совпадают, а $P(t, r_j, \Gamma)$ легко выражается через такую же вероятность для феллеровского процесса и константы, задающие граничное поведение. Поэтому ограничимся исследованием феллеровских процессов.

Рассмотрим соответствующую процессу полугруппу операторов в пространстве C непрерывных функций на $[r_1, r_2]$:

$$T_t f(x) = \int_{r_1}^{r_2} f(y)\, P(t, x, dy).$$

Инфинитезимальный оператор A этой полугруппы задается формулой $D_v D_u$ (операт обобщенной второй производной), а его область определения состоит из функций $F \in$ таких, что $D_v D_u F \in C$, и удовлетворяющих на каждой достижимой границе граничном условию одного из следующих трех видов:

$$(-1)^j D_u F(r_j) + \sigma_j D_v D_u F(r_j) + q_j F(r_j) = 0,$$

$$D_v D_u F(r_j) + q_j F(r_j) = 0,$$

$$F(r_j) = 0, \quad D_v D_u F(r_j) = 0.$$

Здесь $\sigma_j \geqslant 0$, $q_j \geqslant 0$ (см. [1]). Можно, конечно, придать этим условиям одинак вый вид, но нам удобнее этого не делать. Граничные условия вида (1) возможны ли в регулярной границе (т. е. в такой, в которой u и v ограничены); граничные услов вида (2) мы исключим по тем же соображениям, что и нефеллеровские процессы (вмес процесса с граничным условием вида (2) можно рассмотреть процесс с условием вида (3

Прежде чем сформулировать теорему, введем меру v^*, совпадающую в (r_1, r_2) с м рой, задаваемой возрастающей функцией v; $v^*(r_j)$ равна σ_j, если граничное условие r_j вида (1), и нуло в противном случае (т. е. если граничное условие вида (3) или недостижима). Полезность введения такой меры была показана в работе [2].

Теорема. *Пусть $P(t, x, \Gamma)$ — переходная вероятность марковского процесса, д которого $D_v D_u$ с граничными условиями вида* (1) *или* (3) *(или без граничных услови если соответствующая граница недостижима) является инфинитезимальным операт ром. Тогда, если $x \neq r_j$, то $P(t, x, \Gamma)$ имеет плотность относительно v^*:*

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)\, v^*(dy) = \int_{\Gamma \cap (r_1, r_2)} p(t, x, y)\, dv(y) + \sum_{r_j \in \Gamma} \sigma_j p(t, x, r_j).$$

Если r_j — регулярная граница, граница-выход (exit) или граница-вход (entrance), то х верно и для $x = r_j$; если же r_j — естестзенная граница, то $P(t, r_j, r_j) = 1$.

Доказательство основано на следующей идее. Для того чтобы $T_t f(x)$ бы непрерывна по t при $t \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция обращалась нуль в той границе, в которой задано граничное условие вида (3) (множество всех т ких функций будем обозначать C_0). В этом случае $T_t f(x)$ однозначно определяется св им преобразованием Лапласа

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x)\, dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

$T_t f(x)$ выражается через $R_\lambda f(x)$ следующим образом:

$$T_t f(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iN}^{c+iN} e^{\lambda t} R_\lambda f(x)\, d\lambda, \quad c > 0.$$

Это соотношение выполняется для всех f, принадлежащих области определения квадра инфинитезимального оператора ([3], стр. 293). Известно (см. [2]), что оператор R_λ зап сывается в виде интеграла от f с некоторым ядром по мере v^*. Если бы интеграл в сходился к $T_t f(x)$ равномерно по f для $\| f \| \leqslant 1$, то и $T_t f(x)$ задавалась бы интеграл с ядром по мере v^*. Это означало бы абсолютную непрерывность $P(t, x, \Gamma)$ по v^*. О нако $\| R_\lambda \|$ имеет порядок стремления к нулю не выше, чем $1/|\lambda|$, поэтому приходи ся рассматривать степени R_λ, прежде всего R_λ^2. Легко доказать, что $R_\lambda^2 f(x)$ — преоб разование Лапласа от $tT_t f(x)$ ($R_\lambda^n f(x)$ — преобразование Лапласа от $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t f(x$ Поэтому

$$tT_t f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} R_\lambda^2 f(x)\, d\lambda,$$

если только этот интеграл абсолютно сходится.

Таким образом, задача сводится в основном к получению оценки для $R_\lambda^2 f(x)$ при комп-
ных λ. Пользуясь этой идеей, принадлежащей Э. Хиллу ([3], стр. 294—295), автор
ачально доказал существование плотности для случая, когда границы регулярны
$= 0$. В данной работе применен совершенно другой метод оценки степеней резоль-
ты.

Введем две гильбертовых нормы:

$$\| f \|_v^2 = \int_{r_1}^{r_2} | f(x) |^2 v^*(dx) = \int_{r_1}^{r_2} | f(x) |^2 dv(x) + \sum_{j=1}^{2} \sigma_j | f(r_j) |^2,$$

$$\| g \|_u^2 = \int_{r_1}^{r_2} | g(x) |^2 du(x);$$

ответствующие гильбертовы пространства будем обозначать L_v^2, L_u^2. Пространство пар
кций (f, g) с нормой $\| (f, g) \| = \sqrt{\| f \|_v^2 + \| g \|_u^2}$ будем обозначать L. Если функ-
f абсолютно непрерывна по u и $(f, D_u f) \in L$, то

$$| f(x) | \leqslant \frac{\| f \|_v}{\sqrt{v(z) - v(y)}} + \sqrt{u(z) - u(y)} \cdot \| D_u f \|_u, \qquad (6)$$

$y \leqslant x \leqslant z$, $y < z$. Действительно, по неравенству Шварца для $x_1 \leqslant x_2$

$$| f(x_1) - f(x_2) | = \left| \int_{x_1}^{x_2} D_u f(w)\, du(w) \right| \leqslant \sqrt{u(x_2) - u(x_1)} \cdot \| D_u f \|_u.$$

и бы неравенство (6) не было выполнено, для $y \leqslant w \leqslant z$ мы имели бы $| f(w) | >$
$> \frac{\| f \|_v}{\sqrt{v(z) - v(y)}}$, откуда $\| f \|_v^2 \geqslant \int_y^z | f(w) |^2 dv(w) > \| f \|_v^2$, что невозможно.

Теперь оценим $F = R_\lambda f$ через $\| f \|_v$, воспользовавшись тем, что R_λ является ре-
ьвентой инфинитезимального оператора, т. е. $\lambda F - AF = f$. Это означает, что
$- D_v D_u F = f$, и F удовлетворяет граничным условиям (в достижимых границах).

ложим $\sqrt{\lambda} = \mu$, $G = \frac{1}{\mu} D_u F$, тогда вместо одного уравнения мы можем написать
тему

$$\mu F - D_v G = \frac{f}{\mu}, \qquad \mu G - D_u F = 0 \qquad (7)$$

еми же граничными условиями. Пару (F, G), если она принадлежит L, можно рас-
атривать как значение резольвенты S_μ некоторого оператора B в L на паре $(f/\mu, 0)$.
я этого достаточно определить оператор B в L формулой $B(F, G) = (D_v G, D_u F)$.
ластью определения B будем считать $(F, G) \in L$ такие, что F принадлежит области
ределения оператора A, т. е. F, $D_v D_u F \in C$ и F удовлетворяет граничным условиям;
ществует непрерывная производная $D_v G$, и $(D_v G, D_u F) \in L$. Оператор B имеет замы-
ие $\overline{B}$ (для доказательства достаточно проверить, что невозможно $(F_n, G_n) \to 0$,
$F_n, C_n) \to (f, g) \neq 0$ в смысле нормы в L). Как мы покажем, для действительных
> 0 оператор $S_\mu = (\mu F - B)^{-1}$ определен на всюду плотном в L множестве и имеет
норму, не превосходящую $1/\mu$. Отсюда следует, что резольвента $\overline{S}_\mu$ оператора $\overline{B}$
ределена всюду и имеет норму $\leqslant 1/\mu$, а значит, она определена также для ком-
ексных μ, и ее норма не превосходит $1/\operatorname{Re}\mu$. Наконец, равенство $R_\lambda f$ первой коор-
нате $\overline{S}_\mu (f/\mu, 0)$ для комплексных μ является следствием такого же равенства для
йствительных $\mu > 0$ и аналитичности обеих функций.

Пусть $f \in C_0 \cap L_v^2$, g обращается в нуль в некоторых окрестностях r_1, r_2, и суще
вует $D_v g \in C$. Множество таких пар, как легко видеть, всюду плотно в L. Реше
системы

$$\mu F - D_v G = f, \qquad \mu G - D_u F = g$$

с граничными условиями задается формулой $F = R_{\mu^2}(\mu f + D_v g)$, $G = \frac{1}{\mu}(g + D_u F)$.
Покажем, что пара (F, G) принадлежит L и, таким образом, является решением ура
ния $\mu(F, G) - B(F, G) = (f, g)$, т. е. $(F, G) = S_\mu(f, g)$, и дадим оценку для нор
Имеем

$$\| (f, g) \|^2 = \int_{r_1}^{r_2} | \mu F - D_v G |^2 \, dv^* + \int_{r_1}^{r_2} | \mu G - D_u F |^2 \, du =$$

$$= \mu^2 \int_{r_1}^{r_2} | F |^2 \, dv^* - 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{Re}\,[\overline{F} D_v G] \, dv^* + \int_{r_1}^{r_2} | D_v G |^2 \, dv^* +$$

$$+ \mu^2 \int_{r_1}^{r_2} | G |^2 \, du - 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{Re}\,[G \overline{D_u F}] \, du + \int_{r_1}^{r_2} | D_u F |^2 \, du \geqslant$$

$$\geqslant \mu^2 \| (F, G) \|^2 - 2\mu \left\{ \sum_{j=1}^{2} \sigma_j \mathrm{Re}\,[\overline{F}(r_j) D_v G(r_j)] + \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{Re}\,[\overline{F}\, dG] + \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{Re}\,[G\, d\overline{F}] \right\}.$$

Так как $g = 0$ в окрестности r_j, то выражение в фигурных скобках равно

$$\sum_{j=1}^{2} \sigma_j \mathrm{Re} \left[\overline{F}(r_j) \frac{D_v D_u F(r_j)}{\mu} \right] + \mathrm{Re} \left[\overline{F}(x) \frac{D_u F(x)}{\mu} \right] \Bigg|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{2} [\mathrm{Re}\,(\sigma_j \overline{F}(r_j) D_v D_u F(r_j)) + (-1)^j \mathrm{Re}\,(\overline{F}(x) D_u F(x))|_{x=r_j}].$$

Достаточно доказать, что выражение в квадратных скобках неположительно. Тогда
ражение в фигурных скобках также неположительно и $\| (F, G) \| \leqslant 1/\mu \, \| (f, g) \|$. Е
граничное условие в r_j вида (1) (и, стало быть, эта граница регулярна), то выраже
в квадратных скобках равно $-q_j | F(r_j) |^2 \leqslant 0$. В противном случае (т. е. когда
ничное условие вида (3) или r_j недостижима) $\sigma_j = 0$. Воспользуемся тем,
$2\mathrm{Re}\,[\overline{F}(x) D_u F(x)] = D_u | F(x) |^2$. Если u неограничена в r_j, то $\lim\limits_{x \to r_j} D_u | F(x) |^2 = 0$
крайней мере, $\overline{\lim\limits_{x \to r_j}} (-1)^j D_u | F(x) |^2 \leqslant 0$), так как $| F(x) |^2$ остается ограниченным. Е
же u ограничена, то либо F удовлетворяет граничному условию $F(r_j) = 0$, либо
ница r_j естественная. В последнем случае v неограничена в r_j, и так как $\| f \|_v <$
то $f(r_j) = 0$. Легко проверить, что если r_j — естественная граница, то резольвента
переводит функции из C, равные c в r_j, в функции, равные c/λ в r_j. Поэтому $F(r_j)$
$= R_{\mu^2}(\mu f - D_v g)(r_j) = \frac{1}{\mu^2}(\mu f - D_v g)(r_j) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to r_j} (-1)^j D_u | F(x) |^2 \leqslant$
(по крайней мере, это верно для нижнего предела). Таким образом, резольвента
определена на всюду плотном множестве в L и имеет норму в L, не превосходящ
$1/\mu$. Поэтому резольвента $\overline{S}_\mu$ оператора $\overline{B}$ определена всюду и имеет ту же оце
для нормы (при действительных μ).

Докажем теперь, что оператор $\overline{S}_\mu = (\mu E - \overline{B})^{-1}$ определен в L и при комплексн
μ и имеет норму, не превосходящую $1/\mathrm{Re}\,\mu$. Действительно, для достаточно больш

$M > 0$ имеем

$$\overline{S}_\mu = (ME - \overline{B})^{-1}(E - (M-\mu)(ME-\overline{B})^{-1})^{-1} = \overline{S}_M \sum_{n=0}^{\infty} ((M-\mu)\overline{S}_M)^n,$$

откуда, устремляя M к бесконечности, получаем

$$\|\overline{S}_\mu\| \leqslant \|\overline{S}_M\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (|M-\mu| \cdot \|\overline{S}_M\|)^n \leqslant \frac{1}{M} \frac{1}{1 - \frac{|M-\mu|}{M}} \to \frac{1}{\operatorname{Re}\mu}.$$

Учитывая сказанное ранее, получаем оценку для $R_\lambda f$:

$$\|R_\lambda f\|_v \leqslant \frac{\|f\|_v}{|\mu| \operatorname{Re}\mu}, \quad \|D_u R_\lambda f\|_u \leqslant \frac{\|f\|_v}{\operatorname{Re}\mu}.$$

Для $R_\lambda^2 f$ получаем $\|R_\lambda^2 f\|_v \leqslant \frac{\|f\|_v}{|\lambda| \operatorname{Re}^2 \sqrt{\lambda}}$, $\|D_u R_\lambda^2 f\|_u \leqslant \frac{\|f\|_v}{|\sqrt{\lambda}| \operatorname{Re}^2 \sqrt{\lambda}}$.

Согласно (6), имеет место оценка

$$|R_\lambda^2 f(x)| \leqslant \|f\|_v \left[\frac{1}{\sqrt{v(z) - v(y)}\,|\lambda| \operatorname{Re}^2 \sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{u(z) - u(y)}}{|\sqrt{\lambda}| \operatorname{Re}^2 \sqrt{\lambda}} \right] = \|f\|_v \Gamma(\lambda),$$

отсюда, используя формулу (5), получаем:

$$t\,|T_t f(x)| \leqslant \|f\|_v \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\Gamma(\lambda)]\,|d\lambda| \cdot e^{ct}. \tag{9}$$

Здесь можно положить $c = 1/t$, тогда

$$|T_t f(x)| \leqslant \|f\|_v \left[\frac{K_1}{\sqrt{v(z) - v(y)}} + \frac{K_2 \sqrt{u(z) - u(y)}}{\sqrt{t}} \right], \tag{10}$$

где K_1 и K_2 — абсолютные константы.

Пусть теперь Γ — множество, состоящее из конечного числа отрезков, лежащих внутри (r_1, r_2). В случае, когда в r_j задано граничное условие вида (1), будем также рассматривать $\Gamma = r_j$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(x, \Gamma) \geqslant \varepsilon, \\ 1 - \dfrac{\rho(x, \Gamma)}{\varepsilon} & \text{при } \rho(x, \Gamma) < \varepsilon. \end{cases}$$

Функция f удовлетворяет условиям, при которых нами была выведена формула (10). Напишем эту формулу для f и устремим ε к нулю. В пределе получим:

$$P(t, x, \Gamma) \leqslant \sqrt{v^*(\Gamma)} \left[\frac{K_1}{\sqrt{v(z) - v(y)}} + \frac{K_2 \sqrt{u(r) - u(y)}}{\sqrt{t}} \right]. \tag{11}$$

Вспомним, что здесь y и z — любые точки такие, что $y \leqslant x \leqslant z$, $y < z$. Формула (11) показывает, что если $x \neq r_j$, а также при $x = r_j$, если функция u ограничена в r_j, переходная вероятность $P(t, x, \Gamma)$ имеет плотность относительно v^*. Согласно (10), эта плотность принадлежит L_v^2, причем ее норма не превосходит $C_1(x) + C_2(x)/\sqrt{t}$.

Для доказательства остается заметить, что

а) в случае, когда на границе r_j задано граничное условие вида (3).

$$P(t, x, r_j) = P(t, r_j, x) = 0;$$

б) в случае, когда граница r_j недостижима изнутри, $P(t, x, r_j) = 0$ при $x \neq r_j$; $P(t, r_j, r_j) = 0$, когда r_j — граница-выход; $P(t, r_j, r_j) = 1$, когда r_j — естественная граница;

в) в случае, когда r_j — граница-выход, $P(t, r_j, \Gamma)$ имеет плотность по v^*.

Утверждения а) и б) почти очевидны; докажем в). Имеем

$$P(t, r_j, \Gamma) = \int_{r_1}^{r_2} P\left(\frac{t}{2}, r_j, dy\right) P\left(\frac{t}{2}, y, \Gamma\right).$$

В этот интеграл вероятности $P(t/2, y, \Gamma)$ входят только с $y \neq r_j$; поэтому, если $v^*(\Gamma) = 0$. то $P(t/2, y, \Gamma) = 0$ и $P(t, r_j, \Gamma) = 0$. Теорема доказана.

Найденная плотность $p(t, x, y)$ определяется однозначно только для тех точек y, для которых $v^*(y) > 0$ и не обязана быть даже измеримой по x или t. Пусть Δ — интервал (r_1, r_2), к которому добавлены достижимые границы. Плотность можно выбрать непрерывной по (x, y) при $x, y \in \Delta$ и аналитической по t. При этом она симметрична относительно (x, y) и удовлетворяет дифференциальному уравнению Колмогорова, т. е. при фиксированном $x \in \Delta$

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = D_v D_u p(t, x, y),$$

и в достижимых границах выполнены граничные условия. Можно доказать, что $p(t, x, y)$ — единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим двум условиям:

а) $\| p(t, x, y) \|_v \leqslant K t^{s-1} e^{ct}$;

б) интеграл $\int_{r_1}^{z} p(t, x, y)\, v^*(dy)$ ограничен при малых t; при $t \to 0$ он стремится к нулю, если $z < x$, и к единице, если $z > x$. Наметим доказательство существования непрерывного варианта плотности. Прежде всего заметим, что функция $p(t, x, y)$ может быть выбрана измеримой по (t, x, y), например,

$$p(t, x, y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{y_1 \uparrow y \\ y_2 \downarrow y}} \dfrac{P(t, x, (y_1, y_2))}{v^*(y_1, y_2)}, & \text{если этот предел существует;} \\ 0, & \text{если этот предел не существует.} \end{cases}$$

Для любого измеримого по (x, y) варианта плотности $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ для почти всех (x, y) относительно меры $v^* \times v^*$. В самом деле, для действительных $\lambda > 0$ оператор R_λ записывается в виде интеграла по мере v^* с некоторым непрерывным в $\Delta \times \Delta$ симметричным ядром $K_\lambda(x, y)$ (см. [2]); поэтому он является симметричным оператором в L^2_v. Оператор T_t также симметричен, т. е.

$$\int_{r_1}^{r_2} T_t f(x)\, g(x)\, v^*(dx) = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\, T_t g(x)\, v^*(dx)$$

для $f, g \in C_0 \cap L^2_v$. Отсюда вытекает почти-симметричность плотности.

Далее, докажем, что для всех $f \in L^2_v \cap D(A^n)$

$$A^n T_t f(x) = \frac{d^n}{dt^n} T_t f(x) = \int_{r_1}^{r_2} p^{(n)}(t, x, y)\, f(y)\, v^*(dy), \qquad (12)$$

где $p^{(n)}(t, x, y)$ — измеримая, почти-симметричная относительно (x, y) функция ($p(t, x, y) = p^{(0)}(t, x, y)$). Для этого рассмотрим преобразование Лапласа от $\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t f\right)$; оно равно $\lambda^m R^m_\lambda f$. Проведенные нами оценки показывают, что обратное преобразование

Лапласа абсолютно сходится ($n - m > 1$), и $\left| \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t f(x) \right) \right|$ оценивается через $\|f\|_v$. Существование и почти-симметричность $p^{(n)}$ доказываются так же, как и для p. Второе равенство (12) остается верным и для любого $f \in L_v^2$ (оценив производные $T_t f(x)$, можно доказать, что эту функцию можно продолжить аналитически в полуплоскость $\mathrm{Re}\, t > 0$, а из этого вывести аналитичность плотности). Первое равенство (12) уже, вообще говоря, не имеет смысла, так как рассматриваемые функции не обязательно принадлежат C. Однако соответствующее интегральное соотношение),

$$\frac{d^k}{dt^k} T_t f = R_\lambda^n \left(\lambda - \frac{d}{dt} \right)^n \frac{d^k}{dt^k} T_t f$$

сохраняется. Здесь оператор R_λ определяется на всех функциях $f \in L_v^2$ так же, как на функциях из C:

$$R_\lambda f(x) = \int_{r_1}^{r_2} K_\lambda(x, s) f(s) v^*(ds).$$

Отсюда, пользуясь почти-симметричностью всех $p^{(n)}(t, x, y)$, можно вывести, что одним из вариантов $p^{(n)}(t, x, y)$ является

$$p^{(n)*}(t, x, y) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} [\lambda^2 p^{(n)}(t, s, r) -$$

$$- 2\lambda p^{(n+1)}(t, s, r) + p^{(n+2)}(t, s, r)] K_\lambda(x, r) K_\lambda(y, s) v^*(dr) v^*(ds).$$

Ясно, что, так как ядро K_λ непрерывно, то все $p^{(n)*}$ непрерывны при $x, y \in \Delta$ и симметричны. Легко проверить, что

$$p^{(n)*}(t, x, y) = \int_{r_1}^{r_2} K_\lambda(y, s) [\lambda p^{(n)*}(t, x, s) - p^{(n+1)*}(t, x, s)] v^*(ds)$$

и что

$$p^{(n)*}(t, x, y) = \frac{d^n}{dt^n} p^*(t, x, y).$$

Обратным оператором для R_λ является оператор $\lambda E - \widetilde{A}$, где $\widetilde{A}$ — оператор $D_v D_u$, определенный на функциях F, непрерывных в Δ, таких, что $D_v D_u F$ непрерывно в Δ, и удовлетворящих граничным условиям. Поэтому

$$\frac{\partial p^{(n)*}(t, x, y)}{\partial t} = \widetilde{A}_y p^{(n)*}(t, x, y).$$

В частности, выполнено уравнение А. Н. Колмогорова.

Поступила в редакцию
9.3.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Одномерные непрерывные строго марковские процессы, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 1 (1959), 3—54.

[2] W. Feller, On differential operators and boundary conditions, Comm. on Pure and Appl. Math., **VIII** (1955), 203—216.

[3] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1951.

SUR LA CONTINUITÉ ABSOLUE DES PROBABILITÉS DE TRANSITION D'UN PROCESSUS DE DIFFUSION UN-DIMENSIONNEL

A. D. WENTZELL (MOSCOU)

(Sommaire)

On montre que les probabilités de transition d'un $D_v D_u$-processus (processus de diffusion un-dimensionnel) ont une densité par rapport à la mesure canonique v. La densité peut être choisie continue; elle est alors symmetrique et satisfait l'équation différentiel de Kolmogoroff (de Focker — Planck).

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ B и Z-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Л. Н. БОЛЬШЕВ, Б. В. ГЛАДКОВ, М. В. ЩЕГЛОВА

Среди распределений, встречающихся в статистических приложениях, пожалуй, наибольшее значение имеют нормальное, а также Г и B-распределения. К настоящему времени созданы подробные таблицы для первых двух распределений (см., например [1, 4]). Эти таблицы позволяют вычислять с одинаковой точностью значения функции распределения при всех допустимых значениях параметров распределений. Что касается B-распределения, то здесь задача табулирования полностью еще не решена. Известны таблицы К. Пирсона [3] позволяют вычислять значения функций B-распределения лишь для значений параметров, не превосходящих пятидесяти; в остальных случаях рекомендуется пользоваться сложными асимптотическими формулами, практическое применение которых связано с громоздкими вычислениями. Данное сообщение посвящено вопросу табулирования B-распределения во всем диапазоне изменения его параметров. Такое табулирование можно осуществить путем создания таблиц разностей между точными значениями функции B-распределения и значениями ее простейших асимптотических приближений (идея создания таких вспомогательных таблиц была высказана академиком А. Н. Колмогоровым в предисловии к таблицам [4]). Исследования, предпринятые авторами этого сообщения, показали, что для вычисления функции B-распределения, зависящей от трех переменных, достаточно иметь таблицы поправок, являющиеся функциями лишь двух переменных (см. ниже формулы (1) и (6)). При этом погрешность достигает, самое большее, $5 \cdot 10^{-5}$. Компактность этих таблиц позволяет опубликовать их в виде приложения к данной заметке.

В первом разделе кратко излагаются основные сведения о B и Z-распределениях (более подробные сведения можно почерпнуть в монографии [8]), при этом мы пользуемся обозначениями, принятыми в таблицах [3]. Второй раздел посвящен описанию вспомогательных таблиц I и II для вычисления функций B и Z-распределений. В третьем разделе рассматривается возможность применения таблиц I и II для вычисления функции биномиального распределения; результаты иллюстрируются числовым примером. Задача вычисления процентных точек B и Z-распределений в данном кратком сообщении не рассматривается (некоторые предварительные сведения по этому вопросу читатель найдет в работе [10]).

1. Функции B и Z-распределений. Функция B-распределения задается формулой

$$I_x(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $p > 0$, $q > 0$ — параметры распределения и

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

ет место соотношение $I_x(p, q) = 1 - I_{1-x}(q, p)$, поэтому при составлении таблиц спределения достаточно ограничиться случаем $0 < p \leqslant q$.

Функция Z-распределения Фишера задается формулой

$$F_{m,n}(z) = \frac{2m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{z} e^{mx} (me^{2x} + n)^{-\frac{m+n}{2}} dx.$$

$m > 0$, $n > 0$ — параметры распределения. При $m = 2p$, $n = 2q$ и $2z = \ln [qx/p(1-x)]$ ет место равенство $I_x(p, q) = F_{m,n}(z)$.

Если параметры p и q велики, то для вычисления функций B и Z-распределений но воспользоваться асимптотической формулой, предложенной Уишартом [11]:

$$I_x(p, q) = F_{2p,2q}(z) = \Phi(u) + \varphi_1(u, v) + w^2\varphi_2(u, v) + O(\sqrt{v^8 + w^8}), \quad (1)$$

$$w^2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad v = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \quad (2)$$

$$u = \frac{1}{w} \ln \frac{qx}{p(1-x)} = \frac{2z}{w}, \quad (3)$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \Phi^{\mathrm{I}} = \frac{d\Phi(u)}{du}, \quad \Phi^{\mathrm{II}} = \frac{d\Phi^{\mathrm{I}}}{du}, \ldots,$$

$$\varphi_1(u, v) = (3\Phi^{\mathrm{I}} + \Phi^{\mathrm{III}}) \frac{v}{36} + (36\Phi^{\mathrm{II}} + 21\Phi^{\mathrm{IV}} + 2\Phi^{\mathrm{VI}}) \frac{v^2}{144} +$$

$$+ (1620\Phi^{\mathrm{III}} + 1269\Phi^{\mathrm{V}} + 225\Phi^{\mathrm{VII}} + 10\Phi^{\mathrm{IX}}) \frac{v^3}{12960}, \quad (4)$$

$$\varphi_2(u, v) = (6\Phi^{\mathrm{II}} + \Phi^{\mathrm{IV}}) \frac{1}{48} + (120\Phi^{\mathrm{I}} + 270\Phi^{\mathrm{III}} + 81\Phi^{\mathrm{V}} + 5\Phi^{\mathrm{VII}}) \frac{v}{1440}. \quad (5)$$

кно показать, что при $q \geqslant p \geqslant 20$ остаток в формуле (1) по абсолютной величине не восходит $5 \cdot 10^{-5}$, поэтому для вычисления $I_x(p, q)$ при $p \geqslant 20$, $q \geqslant 50$ можно вос- ьзоваться формулой (1) (значения функций φ_1 и φ_2 табулированы в таблице I). Если $0 < p \leqslant q \leqslant 50$, то для отыскания $I_x(p, q)$ следует воспользоваться таблицами [3].

Осталось рассмотреть случай $0 < p \leqslant 20$, $q \geqslant 50$, когда параметр p мал, а q велик. ично приближенное значение $I_x(p, q)$ в этих условиях рекомендуется вычислять с ощью асимптотической формулы

$$I_x(p, q) = I(y, p) + \frac{y^p e^y}{\Gamma(p)} \left(\frac{P_1}{q} + \frac{P_2}{q^2} + \frac{P_3}{q^3} + \ldots\right),$$

$y = qx$, P_i — многочлены, зависящие лишь от y и p, и $I(y, p)$ — функция Г-распре- ения (так называемая неполная Г-функция):

$$I(y, p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^y t^{p-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt.$$

остатком этой формулы является малая точность при $50 \leqslant q \leqslant 500$, поэтому для вы- ления $I_x(p, q)$ мы применили другую более точную формулу, представляющую собой ащение асимптотической формулы для квантилей B-распределения, указанной в ра- е [10]:

$$I_x(p, q) = F_{2p,2q}(z) = I(y, p) + \frac{1}{6(2q + p - 1)^2} \gamma(y, p) + O(q^{-4}), \quad (6)$$

$$y = \frac{x(2q + p - 1)}{2 - x} = \frac{p(2q + p - 1)}{p + qe^{-2z}}, \quad (7)$$

$$\gamma(y, p) = \frac{y^p e^{-y}}{\Gamma(p)} [2y^2 - (p + 1)y - (p^2 - 1)].$$

Значения функций $\varphi_1(u, v)$

u	$v=0.00$	$v=0,05$		$v=0,10$		$v=0,15$		$v=0,20$		$v=0,25$		u
	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	
—4,0	21	2,6	31	6,4	42	12	52	19	62	29	73	—4,
—3,9	29	3,6	43	8,8	56	16	69	26	82	39	95	—3,
—3,8	40	4,9	57	12	74	22	90	34	107	50	124	—3,
—3,7	55	6,7	75	16	96	29	117	45	138	65	159	—3,
—3,6	73	9,1	99	21	124	38	150	58	175	84	201	—3,
—3,5	97	12	128	28	159	49	190	75	221	106	252	—3,
—3,4	127	16	164	37	201	63	238	95	275	135	312	—3,
—3,3	164	21	208	48	252	81	295	121	339	169	382	—3,
—3,2	210	27	261	61	312	103	362	152	413	210	463	—3,
—3,1	266	35	324	78	382	129	439	189	497	259	555	—3,
—3,0	332	45	397	98	463	161	528	233	593	317	658	—3,
—2,9	410	56	483	122	555	199	627	286	699	384	771	—2,
—2,8	501	70	579	151	658	243	737	347	816	463	894	—2,
—2,7	603	86	688	185	772	295	857	418	942	553	1026	—2,
—2,6	718	105	808	223	897	354	987	498	1076	656	1166	—2,
—2,5	844	127	938	268	1031	422	1124	589	1217	771	1310	—2,
—2,4	981	152	1076	318	1171	497	1267	691	1362	899	1457	—2,
—2,3	1125	179	1221	373	1317	581	1413	803	1508	1039	1604	—2,
—2,2	1275	210	1369	434	1464	672	1559	924	1654	1190	1748	—2,
—2,1	1426	242	1518	499	1610	770	1702	1055	1794	1352	1887	—2,
—2,0	1575	277	1663	569	1751	874	1839	1192	1927	1523	2015	—2,
—1,9	1717	314	1800	641	1883	982	1966	1335	2048	1700	2131	—1,
—1,8	1847	351	1924	716	2001	1092	2078	1481	2155	1880	2231	—1,
—1,7	1962	389	2032	791	2102	1204	2172	1627	2242	2062	2313	—1,
—1,6	2056	427	2119	865	2182	1314	2246	1772	2309	2240	2372	—1,
—1,5	2125	464	2181	937	2238	1420	2294	1912	2351	2412	2407	—1,
—1,4	2166	499	2216	1006	2266	1522	2316	2045	2366	2575	2416	—1,
—1,3	2177	531	2221	1069	2265	1615	2310	2167	2354	2726	2398	—1,
—1,2	2155	560	2195	1127	2234	1699	2273	2278	2313	2861	2352	—1,
—1,1	2102	586	2137	1177	2172	1773	2207	2374	2243	2980	2278	—1,
—1,0	2016	607	2048	1219	2080	1836	2112	2456	2144	3080	2176	—1,
—0,9	1901	625	1930	1254	1960	1887	1989	2523	2019	3162	2048	—0,
—0,8	1757	639	1785	1281	1813	1927	1841	2574	1868	3225	1896	—0,
—0,7	1589	649	1616	1301	1642	1956	1669	2612	1695	3271	1722	—0,
—0,6	1400	657	1425	1315	1451	1976	1477	2638	1503	3301	1528	—0,
—0,5	1192	661	1217	1324	1243	1988	1268	2654	1293	3320	1318	—0,
—0,4	970	664	995	1329	1020	1995	1045	2661	1070	3328	1095	—0,
—0,3	737	665	762	1331	787	1997	811	2663	836	3330	861	—0,
—0,2	495	665	520	1331	545	1997	570	2662	595	3328	620	—0,
—0,1	249	665	274	1330	299	1995	324	2660	349	3323	374	—0,
—0,0	0	665	25	1329	50	1993	75	2656	100	3318	125	—0,

Таблица I

и φ_2 (u, v) умножены на 10^5

	v=0,00	v=0,05		v=0,10		v=0,15		v=0,20		v=0,25		u
	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	φ_1	φ_2	
0	0	665	+25	1329	+50	1993	+75	2656	+100	3318	+125	0,0
1	—249	665	—224	1329	—199	1991	—174	2653	—149	3313	—124	0,1
2	—495	664	—470	1327	—445	1989	—421	2649	—396	3307	—371	0,2
3	—737	664	—712	1326	—687	1986	—662	2644	—637	3299	—612	0,3
4	—970	662	—945	1322	—920	1980	—895	2635	—869	3287	—844	0,4
5	—1192	659	—1167	1316	—1141	1970	—1116	2621	—1091	3268	—1065	0,5
6	—1400	654	—1374	1305	—1348	1953	—1322	2598	—1297	3239	—1271	0,6
7	—1589	646	—1563	1289	—1536	1929	—1510	2564	—1483	3195	—1457	0,7
8	—1757	635	—1730	1267	—1702	1894	—1674	2517	—1647	3135	—1619	0,8
9	—1901	621	—1871	1237	—1842	1849	—1812	2455	—1783	3055	—1754	0,9
0	—2016	602	—1985	1199	—1953	1790	—1921	2376	—1889	2954	—1857	1,0
1	—2102	580	—2067	1153	—2031	1720	—1996	2279	—1961	2832	—1926	1,1
2	—2155	553	—2116	1099	—2077	1637	—2037	2167	—1998	2688	—1959	1,2
3	—2177	523	—2132	1037	—2088	1543	—2044	2039	—1999	2525	—1955	1,3
4	—2166	489	—2116	969	—2066	1439	—2016	1898	—1966	2345	—1916	1,4
5	—2125	453	—2068	896	—2012	1327	—1955	1746	—1899	2153	—1843	1,5
6	—2056	416	—1992	819	—1929	1210	—1866	1588	—1803	1952	—1739	1,6
7	—1962	377	—1892	741	—1822	1091	—1751	1427	—1681	1748	—1611	1,7
8	—1847	338	—1771	662	—1694	971	—1617	1266	—1540	1544	—1463	1,8
9	—1717	300	—1634	585	—1551	854	—1468	1108	—1385	346	—1302	1,9
0	—1575	263	—1487	510	—1399	742	—1310	958	—1222	1157	—1134	2,0
1	—1426	227	—1334	440	—1242	636	—1150	817	—1057	981	—965	2,1
2	—1275	195	—1180	374	—1085	539	—991	687	—896	820	—801	2,2
3	—1125	165	—1029	315	—934	450	—838	570	—742	675	—646	2,3
4	—981	138	—886	262	—790	371	—695	467	—600	548	—505	2,4
5	—844	114	—751	215	—658	302	—565	377	—472	439	—379	2,5
6	—718	93	—629	174	—539	243	—450	300	—360	346	—271	2,6
7	—603	75	—519	139	—434	192	—349	235	—265	269	—180	2,7
8	—501	60	—422	110	—343	151	—264	182	—185	206	—107	2,8
9	—410	47	—338	86	—266	116	—194	139	—122	155	— 49	2,9
0	—332	37	—267	66	—202	89	—137	105	—72	116	—6,9	3,0
1	—266	28	—208	50	—150	67	—93	78	—35	85	+23	3,1
2	—210	21	—160	38	—109	49	—59	57	—8,2	62	42	3,2
3	—164	16	—121	28	—77	36	—34	42	+9,8	45	53	3,3
4	—127	12	—90	21	—53	26	—16	30	21	32	58	3,4
5	—97	8,8	—66	15	—35	19	—4,1	21	27	23	58	3,5
6	—73	6,4	—48	11	—22	13	+3,4	15	29	16	55	3,6
7	—55	4,6	—34	7,5	—13	9,4	7,7	11	29	12	49	3,7
8	—40	3,2	—24	5,3	—6,9	6,5	9,7	7,4	26	8,5	43	3,8
9	—29	2,3	—16	3,6	—3,0	4,5	10,2	5,2	23	6,2	37	3,9
0	—21	1,6	—11	2,5	—0,58	3,1	9,7	3,7	20	4,6	30	4,0

Таблица II

$\gamma(y, p)$

y	p 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	y
0	0	0	0	0																		0
1	1	−1	−1	−1	0	0	0															1
2	2	−1	−2	−5	−4	−3	−1	0	0	0												2
3	3	+3	+3	−4	−9	−10	−7	−4	−2	−1	0	0										3
4	2	5	9	+4	−6	−14	−17	−14	−10	−5	−3	−1	0	0	0							4
5	2	5	13	14	+5	−9	−20	−25	−23	−17	−11	−6	−3	−1	−1	0	0					5
6	1	5	14	21	19	+7	−12	−27	−35	−33	−27	−19	−11	−6	−3	−1	−1	0	0			6
7	1	3	12	23	29	25	+8	−15	−35	−45	−46	−39	−28	−19	−11	−6	−3	−1	−1	0	0	7
8	0	2	9	20	33	39	31	+10	−18	−43	−57	−59	−52	−41	−28	−18	−10	−6	−3	−1	−1	8
9		1	6	16	30	45	49	38	+12	−21	−51	−70	−75	−68	−55	−40	−27	−16	−9	−5	−3	9
10		1	4	12	26	44	58	60	45	+14	−25	−60	−83	−91	−85	−71	−54	−37	−24	−14	−8	10
11		0	2	8	19	37	58	72	72	53	+16	−29	−70	−98	−109	−104	−90	−70	−50	−34	−21	11
12			1	5	14	30	51	74	88	85	60	+18	−33	−80	−113	−128	−125	−110	−88	−66	−46	12
13			1	3	9	22	42	67	92	105	98	69	+20	−37	−90	−129	−148	−147	−132	−109	−83	13
14			0	2	6	15	32	56	85	111	122	112	77	+22	−42	−101	−145	−167	−171	−156	−131	14
15				1	4	10	23	44	73	105	131	141	127	86	+25	−46	−112	−163	−191	−195	−182	15
16				1	2	6	15	32	58	92	127	153	161	142	95	+27	−51	−124	−181	−214	−223	16
17				0	1	4	10	23	44	75	113	150	176	181	158	105	+29	−56	−136	−199	−238	17
18					1	2	6	15	32	58	94	135	175	201	203	174	115	+32	−61	−148	−218	18
19					0	1	4	10	22	43	74	115	160	201	226	225	191	125	+35	−66	−161	19
20						1	2	6	15	30	56	92	138	187	229	253	248	208	135	+37	−71	20
21						0	1	4	9	21	40	71	113	164	216	259	281	272	226	146	+40	21
22							1	2	6	14	28	52	88	136	191	246	290	310	296	244	157	22
23							0	1	4	9	19	37	66	108	161	220	278	322	340	321	263	23
24								1	2	6	12	26	48	82	129	188	252	312	356	371	347	24

y	$p=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	y
25								0	1	3	8	17	34	61	100	153	217	285	347	390	402	25
26									1	2	5	11	23	43	75	120	179	249	320	384	426	26
27									0	1	3	7	15	30	54	92	143	208	282	358	423	27
28										1	2	4	10	20	39	67	110	167	238	318	397	28
29										0	1	3	6	14	27	48	82	130	194	271	355	29
30											1	2	4	9	18	34	60	99	153	223	306	30
31											0	1	2	5	12	23	42	73	117	178	254	31
32												1	1	3	8	15	29	52	87	137	204	32
33												0	1	2	5	10	20	37	63	103	160	33
34													0	1	3	6	13	25	45	76	122	34
35														1	2	4	9	17	31	55	90	35
36														0	1	2	6	11	21	39	66	36
37															1	2	3	7	14	27	47	37
38															0	1	2	5	9	18	33	38
39																1	1	3	6	12	22	39
40																0	1	2	4	8	15	40
41																	0	1	2	5	10	41
42																		1	2	3	6	42
43																		0	1	2	5	43
44																			1	1	3	44
45																			0	1	2	45
46																				0	1	46
47																					1	47
48																					0	48

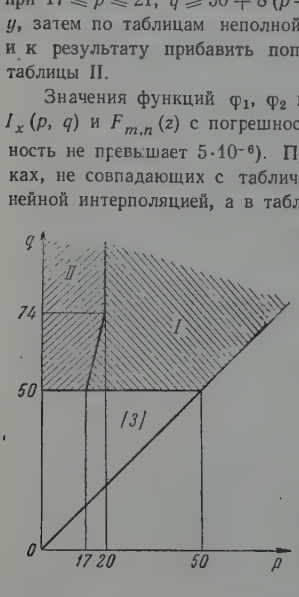
При $p = 0$ функцию γ следует считать равной нулю:
$\gamma\ (y, 0) \equiv 0$

Можно показать, что при $0 < p \leqslant 17$, $q \geqslant 50$ погрешность формулы (6) не превыш $5 \cdot 10^{-5}$. Функция $\gamma(y, p)$ табулирована в таблице II.

2. Описание таблиц. Интерполяция. В таблице I указаны значения функ $10^5 \cdot \varphi_1(u, v)$ и $10^5 \cdot \varphi_2(u, v)$ (см. (4) и (5)), вычисленные с помощью таблиц [2] для $= -4{,}0\,(0{,}1)\,4{,}0$; $v = 0.00\,(0{,}05)\,0{,}25$ ($\varphi_1(u, 0) \equiv 0$). Таблица I предназначена для числения функций B и Z-распределений по формуле (1) при $p \geqslant 20$, $q \geqslant 50$, а та при $17 \leqslant p \leqslant 20$ и $50 \leqslant q \leqslant 50 + 8(p - 17)$. Сначала рекомендуется по формулам и (3) вычислить u, v и w, затем по таблицам функции нормального распределения (например, [1, 2]) следует найти $\Phi(u)$ и к результату прибавить поправку $\varphi_1(u, v) + w^2\varphi_2(u, v)$, вычисленную с помощью таблицы I

В таблице II указаны значения функции $\gamma(y, p)$, вычисленные с помощью таб [4] для $y = 0\,(1)\,48$, $p = 1\,(1)\,21$ ($\gamma(y, 0) \equiv 0$). Эта таблица предназначена для вычис ния функций B и Z-распределений по формуле (6) при $0 < p \leqslant 17$, $q \geqslant 50$, а так при $17 \leqslant p \leqslant 21$, $q \geqslant 50 + 8(p - 17)$. Сначала рекомендуется по формуле (7) вычисл y, затем по таблицам неполной Г-функции (см., например, [4]) следует найти $I(y$ и к результату прибавить поправку $\gamma(y, p) / 6(2q + p - 1)^2$, вычисленную с помощ таблицы II.

Значения функций φ_1, φ_2 и γ, указанные в таблицах I и II, позволяют вычисл $I_x(p, q)$ и $F_{m,n}(z)$ с погрешностью, не превышающей $5 \cdot 10^{-5}$ (если $q \geqslant 160$, то погр ность не превышает $5 \cdot 10^{-6}$). При этом для вычисления поправок в промежуточных т ках, не совпадающих с табличными, достаточно в таблице I ограничиться обычной нейной интерполяцией, а в таблице II — линейной интерполяцией по формуле Стирлин



В частности, при интерполяции по аргументу y, формула имеет вид:

$$\gamma(y) = \gamma(y_0) + \frac{y - y_0}{h} \cdot \frac{\gamma(y_1) - \gamma(y_{-1})}{2},$$

где $y_1 = y_0 + h$, $y_{-1} = y_0 - h$, $|y - y_0| \leqslant h/2$.

Если $0 < p \leqslant q \leqslant 50$, то для отыскания $I_x(p$ следует воспользоваться семизначными таблица функции B-распределения [3].

Отметим, что интерполяция таблиц [3] с точ стью до 10^{-7} или 10^{-6} часто оказывается настол затруднительной (а иногда и просто невозможно что при практических расчетах по таблицам [3] п ходится мириться с погрешностью 10^{-5} или даже 1 Следовательно, таблицы I и II дополняют таблицы без существенной потери точности. На чертеже из ражены те области изменения параметров p и q, где для вычисления $I_x(p, q)$ след пользоваться таблицами I, II или [3] соответственно.

Пусть, например, требуется найти $I_{0.3}(28; 73)$ и $I_{0.3}(16; 85)$. В первом случае т ка с координатами (p, q) принадлежит области I, поэтому для отыскания $I_{0.3}(28;$ воспользуемся таблицей I. Согласно (2) и (3), имеем:

$$w^2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0{,}035714 + 0{,}013699 = 0{,}049413 \text{ и } w = 0{,}222290,$$

$$v = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{0{,}035714 - 0{,}013699}{0{,}22229} = 0{,}09904,$$

$$u = \frac{1}{w} \ln \frac{qx}{p(1 - x)} = \frac{\lg 219 - \lg 196}{0{,}43429 \cdot 0{,}22229} = \frac{2{,}34044 - 2{,}29226}{0{,}09654} = 0{,}49917.$$

Далее находим

по таблицам [1]: $\Phi(u) = 0{,}69117$,
по таблицам I: $\varphi_1(u, v) = 0{,}01304$, $\varphi_2(u, v) = -0{,}01140$.

лу формулы (1) имеем окончательно

$$I_{0,3}(28;\ 73) = \Phi(u) + \varphi_1(u,\ v) + w^2\varphi_2(u,\ v) = 0{,}69117 + 0{,}01304 - \\ - 0{,}04941 \cdot 0{,}01140 = 0{,}70365.$$

ое значение $I_{0,3}(28;\ 73)$ с пятью десятичными знаками равно 0,70364 (см. [6]). Во втором случае $(p,\ q)$ принадлежит области II, поэтому для отыскания $I_{0,3}(16;\ 85)$ ует воспользоваться таблицей II. Согласно (7) имеем:

$$2q + p - 1 = 185 \text{ и } y = \frac{x(2q + p - 1)}{2 - x} = \frac{0{,}3 \cdot 185}{1{,}7} = 32{,}647.$$

ее находим (по таблицам [4] и II): $I(y,\ p) = 0{,}99954$ и $\gamma(y,\ p) = 11$. В силу фор- (6) имеем окончательно

$$I_{0,3}(16;\ 85) = I(y,\ p) + \frac{\gamma(y,\ p)}{6(2q + p - 1)^2} = 0{,}99954 + \frac{11}{6 \cdot (185)^2} = 0{,}99959.$$

асно [6], точное значение $I_{0,3}(16;\ 85)$ с пятью десятичными знаками равно 959.

3. Биномиальное распределение. Пусть μ — случайная величина, подчиняющаяся омиальному распределению с параметрами $(n,\ \theta)$, где n — количество независимых итаний, θ — вероятность положительного исхода в отдельном испытании. Имеет о равенство (см., например, [7]):

$$\mathbf{P}\{\mu \leqslant m\} = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k} = I_{1-\theta}(n - m,\ m + 1). \tag{8}$$

им образом, для вычисления вероятностей $\mathbf{P}\{\mu \leqslant m\}$ можно воспользоваться табли- неполной B-функции, а значит, и таблицами I и II (при $n \leqslant 100$ рекомендуется менять таблицы [5, 6]). Из формул (1) и (8) следует, что при любом $0 < \theta < 1$ и $m,\ n - m \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\mathbf{P}\{\mu \leqslant m\} \sim \Phi\left[\sqrt{\frac{(m + 1)(n - m)}{n + 1}} \ln \frac{(1 - \theta)(m + 1)}{\theta(n - m)}\right] \tag{9}$$

вою очередь, если отношение m/n мало, то из формул (6) и (8) следует, что при ом $0 < \theta < 1$ и $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu \leqslant m\} \sim 1 - I(y,\ m + 1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{y^k}{k!} e^{-y}, \tag{10}$$

$y = \theta(2n - m)/(2 - \theta)$ (заметим, что в случае обычного Пуассоновского приближе- $y = \theta n$). Практически это приближение является удовлетворительным уже при $\leqslant 20$ и $n \geqslant 70$.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда $n = 100$, $\theta = 0{,}3$. Во втором лбце таблицы, следующей ниже, указаны значения вероятностей $\mathbf{P}\{m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2\}$

m_1 m_2	$\mathbf{P}\{m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2\}$	Нормальное приближение	Пуассоновское приближение	Приближение (9)	Приближение (10)	По таблицам I, II
9 14	0,00016	0,00036	0,00092	0,00065	**0,00018**	0,00015
5 20	0,01631	0,01872	0,03437	0,02213	0,**01738**	0,01630
1 26	0,20794	0,20342	0,23205	0,21428	**0,21013**	0,20796
7 33	0,55486	**0,55499**	0.47711	0,55178	0,54760	0,55484
4 39	0,19975	0,20342	0,20930	0,19286	**0,20157**	0,19975
0 45	0,02045	**0,01872**	0,04299	0,01788	0,02243	0,02046
6 51	0,00053	0,00036	0,00314	**0,00041**	0,00070	0,00054

огрешностью, не превышающей $5 \cdot 10^{-6}$ (значения m_1 и m_2 даны в первом столбце). ретьем и четвертом столбцах указаны обычные нормальное и Пуассоновское прибли- ния для $\mathbf{P}\{m_1 \leqslant \mu \leqslant m_2\}$ (см. [9] стр. 138), а в пятом и шестом столбцах — прибли- ия, соответствующие формулам (9) и (10). Наконец, в последнем столбце даны зна-

чения тех же вероятностей, вычисленные по таблицам I и II. В четырех случаях из с приближение (10) превосходит по точности предшествующие три приближения, в д случаях наиболее точным оказывается нормальное приближение и в одном случае—п ближение (9) (наиболее точные приближения выделены в таблице жирным шрифто Результаты вычислений искомых вероятностей по таблицам I и II отличаются от ист ных значений не более, чем на $2 \cdot 10^{-5}$. Следует заметить, что приближение (10), а так первые три значения в последнем столбце, вычислялись с помощью пятизначных табл [4], поэтому величина ошибки округления может достигать 10^{-5}.

Наиболее трудоемкой операцией при вычислении значений функции B-распределе с помощью предлагаемых таблиц является отыскание первого слагаемого в формуле по таблицам [4]. Поэтому весьма желательно издание более подробных и простых табл неполной Г-функции, позволяющих непосредственно вычислять $I(y, p)$ для $0 < p \leqslant$ Объединение этих таблиц с пятизначным вариантом таблиц [3], а также с таблица функций Ф, φ_1, φ_2 и γ явится пособием умеренного объема, позволяющим вычисл функции нормального, Г и B-распределений во всем диапазоне изменения параметр

Поступила в редакцию
28.6.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Таблицы вероятностных функций, том II (Библиотека математических табл вып. 3), Вычислит. центр АН СССР, М., 1959.

[2] Таблицы функции нормального распределения и ее нормированных производн под ред. Н. В. Смирнова, М., Изд. АН СССР, 1960.

[3] K. Pearson, Tables of the Incomplete Beta-function, Biometric Laboratory, L don, 1934.

[4] Е. Е. Слуцкий, Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции ве ятностей χ^2, М.— Л., Изд. АН СССР, 1950.

[5] Tables of the Binomial Probability Distribution, National Bureau of Standar Applied Mathematics Series, 6, Washington, 1950.

[6] H. G. Romig, 50—100 Binomial Tables, New York, John Wiley & Sons, Inc., L don, Chapman & Hall, Limited, 1953.

[7] И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и ма матическая статистика в технике (общая часть), М., ГИТТЛ, 1955.

[8] Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.

[9] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., ИЛ, 1952.

[10] Л. Н. Большев, Об оценках вероятностей, Теория вероят. и ее примен., V (1960), 453—457.

[11] J. Wishart, An approximate formula for the cumulative z-distribution, Ann. Ma Statistics, **28**, 2 (1957), 504—510.

TABLES FOR CALCULATION OF B AND Z-DISTRIBUTION FUNCTIONS

L. N. BOLSHEV, B. V. GLADKOV, M. V. ŠČEGLOVA (MOSCOW)

(*Summary*)

Tables for the calculation of B and Z-distribution functions $I_x(p, q)$ and $F_{2p,2q}(z)$ given. The published tables can be used as a certain supplement to Karl Pearson's «Tab of the Incomplete Beta-function», Biometric Laboratory, London (1934), and permit calculation of $I_x(p, q)$ and $F_{2p,2q}(z)$ for $q \geqslant 50$ and $p \leqslant q$. The error of calculation is higher than $5 \cdot 10^{-5}$ (for the case $q \geqslant 160$ the error does not exceed $5 \cdot 10^{-6}$).

The paper gives regions of variable parameters p and q, where tables I, II and can be used for the calculation of $I_x(p, q)$.

For example let us obtain $I_{0.3}(28; 73)$ and $I_{0.3}(16; 85)$. The point (p, q) in the fi case belongs to region I and for this reason we shall use table I. With the help of

nd (3)

$$w^2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0.035714 + 0.013699 = 0.049413, \quad w = 0.222290,$$

$$v = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{0.035714 - 0.013699}{0.22229} = 0.09904,$$

$$u = \frac{1}{w} \ln \frac{qx}{p(1-x)} = \frac{\lg 219 - \lg 196}{0.43429 \cdot 0.22229} = \frac{2.34044 - 2.29226}{0.09654} = 0.49917.$$

'hen:

from table I we have $\Phi(u) = 0.69117$, and

from table I: $\varphi_1(u, v) = 0.01304$, $\varphi_2(u, v) = -0.01140$.

Using formula (1) we obtain finally

$$I_{0.3}(28; 73) = \Phi(u) + \varphi_1(u, v) + w^2(u, v) =$$
$$= 0.69117 + 0.01304 - 0.04941 \cdot 0.01140 = 0.70365.$$

The exact value of $I_{0.3}(28;73)$ to five decimal places is 0.70364 (f. [6]).

In the second example the parametric point (p, q) is in the region II. That is why ve shall use table II for obtaining $I_{0.3}(16; 85)$. With the help of (7)

$$2q + p - 1 = 185 \text{ and } y = \frac{x(2q + p - 1)}{2 - x} = \frac{0.3 \cdot 185}{1.7} = 32.647.$$

Then by virtue of [4] and II $I(y, p) = 0.99954$ and $\gamma(y, p) = 11$. Formula (6) gives he final value

$$I_{0.3}(16; 85) = I(y, p) + \frac{\gamma(y, p)}{6(2q + p - 1)^2} = 0.99954 + \frac{11}{6(185)^2} = 0.99959,$$

he exact value of $I_{0.3}(16; 85)$ to five decimal places is equal to 0.99959.

О ПРОВЕРКЕ СЛУЧАЙНОСТИ ВЫБОРА БЕЗ ВОЗВРАЩЕНИЯ

Е. А. БАВАРОВ, П. Ф. БЕЛЯЕВ

Изучается распределение статистики критерия для проверки случайности выбора без возвращения.

§ 1. Постановка задачи

Предположим, что имеется некоторая конечная совокупность, содержащая k_1 элементов первого вида, k_2 элементов второго вида, ..., k_s элементов s-го вида, и пусть

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = k. \tag{1}$$

Предположим далее, что из данной совокупности извлечено n выборок без возвращения, объема l каждая ($l \leqslant k$). Выборки предполагаются стохастически независимыми (т. е. элементы, извлеченные при одном выборе, возвращаются в данную совокупность, перемешиваются, и затем производится следующий выбор). Каждой такой выборке может быть поставлена в соответствие последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_l$, где i_j — номер вида элемента, появившегося на j-м месте ($1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant l$).

Обозначим $\nu_j^{(i)}$ частоту появления элементов, принадлежащих виду с номером i, на j-м месте по всем n выборкам. Будем говорить, что выбор без возвращения случаен, если при любом извлечении с равной вероятностью может появиться любой из оставшихся элементов независимо от того, какие элементы были извлечены ранее.

Пусть H_0 — гипотеза, согласно которой все n выборок получены в результате случайного выбора без возвращения. В заметке рассматривается распределение статистики, кото-

рая может быть использована для проверки такой гипотезы. Эта статистика представляет собой квадратичную форму от величин $\hat{\nu}_j^{(i)} = \nu_j^{(i)} - M\nu_j^{(i)}$, аналогичную статистике χ^2, где $M\nu_j^{(i)}$ вычислены в предположении, что верна гипотеза H_0.

Пусть $p_j^{(i)}$ — вероятность того, что при j-м извлечении появится элемент i-го вида $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant l)$. Если процесс выбора случаен, то $p_j^{(i)} = k_i/k$ при всех j. В качестве конкурирующих гипотез, по отношению к которым предлагаемый критерий оказывается состоятельным, мы будем рассматривать все гипотезы H_1, согласно которым хотя бы для одной пары (i, j) имеет место неравенство $p_j^{(i)} \neq k_i/k$.

Наряду с p рассмотрим величины $p_{jt}^{(ir)}$, являющиеся вероятностями того, что при j-м извлечении появится элемент i-го вида, а при t-м извлечении — элемент r-го вида $(p_{jj}^{(ii)} = p_j^{(i)})$. Для случайного выбора при $i \neq r$ и $j \neq t$

$$p_{jj}^{(ii)} = \frac{k_i}{k}, \quad p_{jj}^{(ir)} = 0, \quad p_{jt}^{(ii)} = \frac{k_i(k_i - 1)}{k(k-1)}, \quad p_{jt}^{(ir)} = \frac{k_i k_r}{k(k-1)}. \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$\nu_j^{(i)} = \sum_{z=1}^{n} x_{j,z}^{(i)}, \tag{3}$$

где $x_{j,z}^{(i)}$ — случайная величина, принимающая значение 1, если в выборке с номером z на j-м месте стоит элемент i-го вида, и 0 в противоположном случае. В силу предположения о независимости выборок случайные величины $x_{j,1}^{(i)}, \ldots, x_{j,n}^{(i)}$ независимы. Кроме того

$$Mx_{j,z}^{(i)} = p_j^{(i)} \text{ и } Mx_{j,z}^{(i)}x_{q,z}^{(r)} = p_{jq}^{(ir)}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем

$$M\nu_j^{(i)} = np^{(i)} \text{ и } M(\nu_j^{(i)} - M\nu_j^{(i)})(\nu_q^{(r)} - M\nu_q^{(r)}) = n(p_{jq}^{(ir)} - p_j^{(i)}p_q^{(r)}). \tag{5}$$

§ 2. Исследование асимптотического распределения статистики U_n

Рассмотрим статистику

$$U_n = \sum_{i,j} \frac{k}{nk_i} [\hat{\nu}_j^{(i)}]^2, \text{ где } \hat{\nu}_j^{(i)} = \nu_j^{(i)} - n\frac{k_i}{k}.$$

Если справедлива гипотеза H_0, то $nk_i/k = M\nu_j^{(i)}$ и поэтому статистика U_n аналогична статистике обычного критерия χ^2.

Исследуем асимптотическое распределение статистики U_n при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Если верна гипотеза H_0, то при $n \to \infty$ распределение случайной величины U_n сходится к распределению величины*

$$U = \frac{k}{k-1}\chi^2_{(l-1)(s-1)} + \frac{k-l}{k-l}\chi^2_{(s-1)},$$

где $\chi^2_{(l-1)(s-1)}$ и $\chi^2_{(s-1)}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 с $(l-1)(s-1)$ и $s-1$ степенями свободы соответственно.

Доказательство. Из центральной предельной теоремы следует, что если верна гипотеза H_0 и $n \to \infty$, то sl-мерная случайная величина $\{\hat{\nu}_j(i)\sqrt{k/nk_i}\}$ $(i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, l)$ распределена асимптотически нормально со средним значением 0 и некоторой матрицей вторых центральных моментов, которую мы обозначим Λ_{sl}. Принимая во внимание соотношения (2) и (5), эту матрицу можно записать в виде $\Lambda_{sl} = (L_{ij})$, где L_{ij} — подматрицы порядка l, каждая из которых на главной диагонали имеет элементы a_{ij}, а вне главной диагонали b_{ij}, где $a_{ii} = 1 - k_i/k$, $a_{ij} = -\sqrt{k_i k_j}/k$ и $b_{ij} = -a_{ij}/(k-1)$.

Характеристический определитель матрицы Λ_{sl} равен $|\Lambda_{sl} - \lambda E|$. Он может быть образован следующим образом. Из каждой hl-й строки ($h = 1, 2, \ldots s$) вычтем $(hl-1)$-ю, из $(hl-1)$-й — $(hl-2)$-ю и т. д. Наконец из $[h(l-1)+2]$-й $[h(l-1)+1]$-ю. В полученном определителе каждый gl-й столбец ($g=1, 2, \ldots s$) прибавим к $(gl-1)$-у и т. д. Наконец, $[g(l-1)+2]$-й столбец прибавим к $[g(l-1)+1]$-у. Используя теорему Лапласа о разложении определителей, получим

$$|\Lambda_{sl} - \lambda E| = [\Delta'_s(\lambda)]^{l-1}\Delta''_s(\lambda), \tag{6}$$

где $\Delta'_s(\lambda) = |-k(b_{ij}) - \lambda E|$ и $\Delta''_s(\lambda) = |-(k-l)(b_{ij}) - \lambda E|$.

Легко видеть, что для $\Delta'_s(\lambda)$ справедливо следующее рекуррентное равенство:

$$\Delta'_s(\lambda) = \left(\frac{k}{k-1} - \lambda\right)\Delta'_{s-1}(\lambda) - \frac{k_s}{k-1}\left(\frac{k}{k-1} - \lambda\right)^{s-1},$$

откуда $\Delta'_s(\lambda) = \lambda\left(\frac{k}{k-1} - \lambda\right)^{s-1}$. Аналогично находим $\Delta''_s(\lambda) = \lambda\left(\frac{k-l}{k-1} - \lambda\right)^{s-1}$. В силу (6) отсюда следует, что матрица Λ_{sl} имеет характеристические корни 0, $k/(k-1)$, $(k-l)/(k-1)$ кратности l, $(l-1)(s-1)$ и $s-1$ соответственно.

Известно (см. Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948, § 24.5), что если распределение случайного вектора $\bar{\xi}_N = \{\xi_{N1}, \xi_{N2}, \ldots \xi_{Nr}\}$ при $N \to \infty$ сходится к r-мерному нормальному закону (вырожденному или невырожденному) со средним значением 0 и матрицей вторых моментов Λ, то величина $\sum_{i=1}^{r} \xi_{Ni}^2$ при $N \to \infty$ асимптотически распределена как $\Sigma\lambda_i\chi^2_{r_i}$, где λ_i — собственные числа матрицы Λ кратности r_i, а $\chi^2_{r_i}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 с r_i степенями свободы соответственно. Воспользовавшись этим фактом, нетрудно убедиться в справедливости теоремы 1.

Плотность вероятности случайной величины U имеет вид

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{(l-1)(s-1)/2-1}}{2^{(l-1)(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{(l-1)(s-1)}{2}\right)} e^{-(x-t)/2} \frac{k}{k-l}\left(\frac{kt}{k-l}\right)^{(s-1)/2-1} \times$$

$$\times \frac{e^{-kt/2(k-l)}}{2^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}\,dt \qquad (x > 0).$$

Осуществляя под знаком интеграла разложение по степеням l/k, интегрированием получаем следующее соотношение:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{k-1}{k}U < x\right\} = F(x) + p(x)\left\{\frac{x}{k} - \frac{l(s+1)}{2k^2}\left[\frac{x^2}{l(s-1)} - x\right]\right\} + o(k^{-3}).$$

Здесь $F(x)$ и $p(x)$ — функция и плотность распределения χ^2 с $l(s-1)$ степенями свободы.

§ 3. Проверка состоятельности критерия

Лемма. *Пусть W — статистика, зависящая от выборки объема n, обладающая следующими свойствами:*

1) при H распределение W не зависит от n,

2) $\mathbf{M}(W \mid H^*) = an + b$; $\mathbf{D}(W \mid H^*) = cn + d$, где a, b, c, d — константы, не зависящие от n, $a \neq 0$; H и H^* — две гипотезы. Тогда критерий для проверки гипотезы H, основанный на статистике W, будет состоятельным относительно альтернативной гипотезы H^*.

Доказательство. Пусть сначала $a > 0$. Определим величину t равенством $\{W > t \mid H\} = \alpha$, где α — вероятность ошибки первого рода. Применяя неравенство

Чебышева, для всех n, начиная с некоторого, имеем:

$$\mathbf{P}\{W \leqslant t \mid H^*\} = \mathbf{P}\{W - an - b < t - an - b \mid H^*\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{(W - an - b)^2 > (t - an - b)^2 \mid H^*\} < \frac{cn + d}{(t - an - b)^2},$$

откуда при $n \to \infty$ следует, что $\mathbf{P}\{W < t \mid H^*\} \to 0$, что и доказывает состоятельно критерия. Аналогичный результат можно получить при $a < 0$, так как в этом слу критическая область определяется неравенством $W < t$.

В обозначениях § 1 верна следующая

Теорема 2. *Критерий проверки гипотезы H_0, основанный на статистике U_n, дет состоятельным по отношению к любой альтернативе типа H_1.*

Доказательство. Учитывая теорему 1, имеем

$$\mathbf{M}\{U_n \mid H_1\} = n \sum_{i,j} \frac{k}{k_i} \left(p_j^{(i)} - \frac{k_i}{k}\right)^2 + A_1 \text{ и } \mathbf{D}\{U_n \mid H_1\} = nB + A_2,$$

где A_1, A_2, B не зависят от n. Применяя к статистике U только что доказанную лем убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Заключение

Рассмотренный критерий использует статистику, аналогичную статистике χ^2. Ста стика U_n представляет собой одну из простейших квадратичных форм от величин $\hat{\nu}$ Среди других квадратичных форм от величин $\hat{\nu}_j^{(i)}$ представляет интерес статистика

$$Q_n = \frac{k-1}{n}\left\{\sum_{ij} \frac{[\hat{\nu}_j^{(i)}]^2}{k_i} + \frac{1}{k-l}\sum_i \frac{[\hat{\nu}^{(i)}]^2}{k_i}\right\}, \text{ где } \hat{\nu}^{(i)} = \sum_j \hat{\nu}_j^{(i)}.$$

Можно показать, что Q_n при $n \to \infty$ распределена асимптотически, как χ^2 с $l(s-$ степенями свободы.

В заключение выражаем глубокую благодарность Н. В. Смирнову и Л. Н. Боль ву за ценные советы.

Поступила в редакцию
31.03.60

ON TESTING THE RANDOMNESS OF SAMPLING WITHOUT REPLACEMENT

E. A. BAVAROV, P. F. BELJAEV (MOSCOW)

(Summary)

The limit distribution of a χ^2-test statistic for the case of sampling without rep cement is studied. The results obtained are used for checking the randomness of sampli

---

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ И КВАЗИМОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

П. И. КУЗНЕЦОВ, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, В. И. ТИХОНОВ

Настоящая статья примыкает к серии работ [1—5], которые посвящены исследо нию систем характеризующих функций. Основные результаты были получены в 195 55 гг., но их публикация по ряду причин задержалась.

Системы характеризующих функций: моментных, корреляционных или квазимоме ных, а также функций распределения в теории коррелированных случайных точ

статистически полно описывают произвольный случайный процесс и через них может быть выражено решение любой задачи. При этом предполагается, что данный процесс не относится к числу процессов специального вида, когда более удобным может оказаться какой-либо специальный математический аппарат. Для математического аппарата систем функций характерно появление рядов, в которых роль членов, соответствующих корреляциям более высокого порядка, уменьшается с увеличением порядка. Квазимоментные функции [3] позволяют непосредственно записать плотность многомерного распределения в виде формального ряда по многомерным полиномам Эрмита. При добавлении новых моментов времени вид этого выражения не меняется. Если опустить нормировочный множитель *, то при бесконечном увеличении плотности выбранных точек на некотором интервале такое выражение стремится к некоторому пределу, который формально является интегральным выражением от случайной функции, т. е. зависит от континуального множества случайных величин.

В настоящей работе сначала будут найдены квазимоментные функции для случая, когда в ряде точек известна реализация случайного процесса. Уплотняя эти точки на некотором подынтервале, получим формальное выражение для условных квазимоментных функций, соответствующих фиксации континуального множества случайных величин. Вопросы сходимости рядов и выяснения точного смысла интегралов рассматриваться не будут.

Пусть на некотором интервале T случайный процесс задан квазимоментными функциями $b_q(t_1, \ldots, t_q)$, $(q = 1, 2, \ldots)$, соответствующими образующим функциям, $r(t_1)$, $r(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2 \in T)$ [3]. Пусть далее на некотором подмножестве $T_1 \subset T$ заданы значения случайной функции

$$\xi(\tau) = s(\tau) + x(\tau), \quad (\tau \in T_2). \tag{1}$$

Найдем условные квазимоментные функции $\tilde{b}_q(t_1, \ldots, t_q)$, соответствующие заданным значениям (1). Будем предполагать сначала, что T_1 представляет собой конечное множество точек: $\tau_1, \ldots, \tau_l$. Плотность условного распределения случайных величин $\xi_1 = \xi(t_1), \ldots, \xi_k = \xi(t_k)$, $(t_i \in T_1)$, равна

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_k \mid \xi_1', \ldots, \xi_l') = \frac{p(\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_1', \ldots, \xi_l')}{\int p(\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_1', \ldots, \xi_l')\, d\xi_1, \ldots, d\xi_k}, \tag{2}$$

где $p(\xi_1, \ldots, \xi_k \mid \xi_1', \ldots, \xi_l')$ — плотность совместного распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$, $\xi_1' = \xi(\tau_1), \ldots, \xi_l' = \xi(\tau_l)$.

Нетрудно убедиться, что характеристическая функция плотности (2) имеет вид:

$$\tilde{\theta}(u_1, \ldots, u_k) = \frac{\theta_1(u_1, \ldots, u_k, \xi_1', \ldots, \xi_l')}{\theta_1(0, \ldots, 0, \xi_1', \ldots, \xi_l')},$$

где

$$\theta_1(u_1, \ldots, u_k, \xi_1', \ldots, \xi_l') = \int \ldots \int e^{i \sum_{\alpha=1}^{k} u_\alpha \xi_\alpha} p(\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_1', \ldots, \xi_l')\, d\xi_1 \ldots d\xi_k.$$

В то же время она выражается при помощи обратного преобразования Фурье

$$\theta_1(u_1, \ldots, u_k, \xi_1', \ldots, \xi_l') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^l} \int \ldots \int \exp\left(-\sum_{\beta=1}^{l} u_\beta' \xi_\beta'\right) \theta(u_1, \ldots, u_k, u_1', \ldots, u_l')\, du_1' \ldots du_l' \tag{3}$$

* В задачах с условными вероятностями нормировка несущественна.

через [характеристическую функцию совместного распределения $\theta_1(u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_l$. Последняя согласно [3] выражается через квазимоментные функции ($\alpha, \gamma, \alpha_j = 1, \ldots,$ $\beta, \delta, \beta_j = 1, \ldots l$)

$$\theta(u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_l) = \exp\left[i \sum_{\alpha} s(t_\alpha) u_\alpha + i \sum_{\beta} s(\tau_\beta) u'_\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha\gamma} r(t_\alpha, t_\gamma) u_\alpha u_\gamma + i^2 \sum_{\alpha,\beta} r(t_\alpha, \tau_\beta) u_\alpha u'_\beta + \sum_{\beta,\delta} r(\tau_\beta, \tau_\delta) u'_\beta u'_\delta \right] \times$$

$$\times \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_m} u'_{\beta_1} \ldots u'_{\beta_n} b_{m+n}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_m}, \tau_{\beta_1}, \ldots, \tau_{\beta_n}).$$

Для вычисления условной характеристической функции (3) нет надобности совер шать обратное преобразование Фурье по переменным $u_1, \ldots u_k$, которые играют роль па раметров, не изменяя по существу обращения по переменным $u'_1, \ldots, u'_l$, которое про водится так же, как в [3]. Результат имеет вид

$$\theta_1(u_1, \ldots, u_k, \xi'_1, \ldots, \xi'_l) = \exp\left[i \sum_{\alpha} s(t_\alpha) u_\alpha + i \sum_{\alpha,\gamma} r(t_\alpha, t_\gamma) u_\alpha u_\gamma \right] \times$$

$$\times \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_m} \left(-\frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}} \right) \ldots \left(-\frac{\partial}{\partial x_{\beta_n}} \right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma} a_{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma \right] b_{m+n}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_m}, \tau_{\beta_1}, \ldots, \tau_{\beta_n})$$

или

$$\theta_1(u_1, \ldots, u_k; \xi'_1, \ldots, \xi'_m) =$$

$$= \exp\left[i \sum_{\alpha} s(t_\alpha) u_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\gamma} r(t_\alpha, t_\gamma) u_\alpha u_\gamma - \frac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma} a_{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma \right] \times$$

$$\times \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!n!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha m} \times$$

$$\times H^{(A)}_{\beta_1 \ldots \beta_n} \left(\sum_{\rho_1} a_{\beta_1 \rho_1} X_{\rho_1}, \ldots, \rho_n, \ldots, \sum_{\rho_n} a_{\beta_n \rho_n} X_{\rho_n} \right) b_{m+n}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_m}, \tau_{\beta_1}, \ldots, \tau_{\beta_n}), \quad (4)$$

где

$$X_\rho = x_\rho - i \sum_{\alpha} r(\tau_\rho, t_\alpha) u_\alpha \quad \text{и} \quad A = \| a_{\rho\sigma} \| = \| r(\tau_\rho, \tau_\sigma) \|^{-1}. \quad (5)$$

Из (4), (5) видно, что в качестве условных образующих функций удобно выбрать

$$\tilde{s}(t) = s(t) + \sum_{\rho,\sigma} r(t, \tau_\rho) a_{\rho\sigma} x_\sigma \quad \text{и} \quad \tilde{r}(t, t') = r(t, t') - \sum_{\rho,\sigma} r(t, \tau_\rho) a_{\rho\sigma} r(\tau_\sigma, t'). \quad (6)$$

Условные квазимоментные функции совпадают с коэффициентами разложения в ряд

$$\exp\left[-i \sum_{\alpha} \tilde{s}(t_\alpha) u_\alpha - \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\gamma} \tilde{r}(t_\alpha, t_\gamma) u_\alpha u_\gamma \right] \times$$

$$\times \frac{\theta_1(u_1, \ldots, u_k; \xi'_1, \ldots, \xi'_l)}{\theta_1(0, \ldots, 0, \xi'_1, \ldots, \xi'_l)} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{i^q}{q!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_q} b_q(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_q}). \quad (7)$$

Обозначая

$$\theta_1(0, \ldots, 0, \xi_1', \ldots, \xi_l') = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma} a_{\rho\sigma}x_\rho x_\sigma\right]\Big|Z,$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n=1}^{l} H^{(A)}_{\beta_1\ldots\beta_n}(y_{\beta_1}, \ldots, y_{\beta_n})\, b_n(\tau_{\beta_1}, \ldots, \tau_{\beta_n}),\ \left(y_\beta = \sum_{\rho=1} a_{\beta\rho}x_\rho\right)$$

и учитывая (5)—(7), находим

$$\sum_{q=0}^{\infty}\frac{i^q}{q!}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_q}\widetilde{b}_q(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_q}) =$$

$$= \frac{1}{Z}\exp\left[\frac{\varphi}{2} - i\sum_{\alpha,\rho,\sigma} u_\alpha r(t_\alpha, \tau_\rho)\, a_{\rho\sigma}x_\sigma\right]\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!n!}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m}\times$$

$$\times\left(-\frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}}\right)\ldots\left(-\frac{\partial}{\partial x_{\beta_n}}\right)\exp\left[-\frac{\varphi}{2} + i\sum_{\alpha,\rho,\sigma} u_\alpha r(t_\alpha, \tau_\rho)\, a_{\rho\sigma}x_\sigma\right],$$

где $\varphi = \sum_{\rho,\sigma=1}^{l} a_{\rho\sigma}x_\rho x_\sigma$. Дифференцируя $\exp\left[i\sum u_\alpha r(t_\alpha, \tau_\rho)\, a_{\rho\sigma}x_\sigma\right]$, получаем производящее равенство для условных квазимоментных функций:

$$\sum_{q=0}^{\infty}\frac{i^q}{q!}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_q}\widetilde{b}_q(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_q}) = \frac{1}{Z}e^{\frac{\varphi}{2}}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!n!}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m}\times$$

$$\times\left[-\frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}} - i\sum_{\gamma_1,\rho_1} u_{\gamma_1} r(t_{\gamma_1}, \tau_{\rho_1})\, a_{\rho_1\beta_1}\right]\ldots\left[-\frac{\partial}{\partial x_{\beta_n}} - i\sum_{\gamma_n,\rho_n} u_{\gamma_n} r(t_{\gamma_n}, \tau_{\rho_n})\, a_{\rho_n\beta_n}\right]\times$$

$$\times e^{-\frac{\varphi}{2}} b_{m+n}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_m}, t_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_n}).$$

Отсюда, дифференцируя по $u_1, \ldots, u_q$ и полагая $u_1 = u_2 = \ldots = 0$, а также учитывая определение многомерных полиномов Эрмита, находим

$$\widetilde{b}_q(t_1, \ldots, t_q) = \frac{1}{Z}\sum_{u=0}^{q}(-1)^u\sum{}'\sum_{\substack{\rho_1,\ldots,\rho_u\\ \sigma_1,\ldots,\sigma_u}} r(t_{\gamma_1}, \tau_{\rho_1})\ldots r(t_{\gamma_u}, \tau_{\rho_u})\, a_{\rho_1\sigma_1}, \ldots, a_{\rho_u\sigma_u}\times$$

$$\times\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_v} H^{(A)}_{\beta_1\ldots\beta_v}(y_{\beta_1}, \ldots, y_{\beta_v})\, b_{q+v}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_{q-u}}, \tau_{\sigma_1}, \ldots, \tau_{\sigma_u}, \tau_{\beta_1}, \ldots, \tau_{\beta_v}). \quad (8)$$

Здесь Σ' обозначена симметризующая сумма, содержащая C_q^u членов и соответствующая различным способам разбиения аргументов $t_1, \ldots, t_q$ на группы $t_{\gamma_1}, \ldots, t_{\gamma_u}$ и $t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_{q-u}}$.

Как частный случай основной формулы (8) нетрудно получить выражение для апостериорного среднего значения $\mathbf{M}_{ps}\xi(t) = \widetilde{s}(t) + \widetilde{b}_1(t)$. Полагая в (8) $q=1$, имеем

$$\widetilde{b}_1(t) = \frac{1}{Z}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_v=1}^{l} H^{(A)}_{\beta_1\ldots\beta_v}(y_{\beta_1}, \ldots, y_{\beta_v}, v_{v+1}(\ , \tau_{\beta_1}, \ldots, \tau_{\beta_v}) -$$

$$-\frac{1}{Z}\sum_{\rho,\sigma=1}^{l} r(t,\tau_\rho)\,a_{\rho\sigma}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_v=1}^{l} H^{(A)}_{\beta_1\ldots\beta_v}(y_{\beta_1},\ldots,y_{\beta_v})\,b_{v+1}(\tau_\sigma,\tau_{\beta_1},\ldots,\tau_{\beta_v}). \quad (9)$$

Проверим найденные формулы на частном примере исчезающей корреляции. Если корреляция между $\xi(t)$ $(t\in T_2)$, с одной стороны, и $\xi(\tau)$ $(\tau\in T_1)$, — с другой, исчезает, то целесообразно брать образующую $r(t,\tau)$, удовлетворяющую условию $r(t,\tau_\rho)\to 0$, $(t\in T_2,\ \tau_\rho\in T_1)$. При этом

$$b_{q+v}(t_{\alpha_1},\ldots,t_{\alpha_q},\tau_{\beta_1},\ldots,\tau_{\beta_v})\to b_q(t_{\alpha_1},\ldots,t_{\alpha_q})\,b(\tau_{\beta_1},\ldots,\tau_{\beta_v}).$$

Учитывая последние соотношения, из (8) и (9) нетрудно видеть, что $\widetilde{b}_q(t_1,\ldots,t_q)\to$ $\to b(t_1,\ldots,t_q)$.

Выведенные формулы можно применять и в тех случаях, когда реализация (7) задана непрерывным образом на некотором интервале $t_1\in T$. Для этого произведем Δ-разбиение этого интервала точками $\tau_1<\ldots<\tau_N$, $|\tau_i-\tau_{i-1}|\leqslant\Delta$ $(i=2,\ldots,N)$. Для каждого разбиения можно воспользоваться найденными ранее формулами, определяющими условные квазимоментные функции. Если затем Δ устремить к нулю, то выражения для условных квазимоментных функций перейдут в такие интегральные выражения, которые могут быть найдены тем же способом, что и выражения для континуальной плотности вероятности в [3] (образующие функции также будут стремиться к некоторым предельным функциям). Мы не будем повторять рассуждений в отношении вывода и интерпретации соответствующих предельных выражений, а ограничимся приведением результатов.

Заменяя суммирование с матрицей $a_{\rho\sigma}$ на интегрирование с функцией $g(t,t')$, определяемой равенством

$$\int_{T_1} r(t,t')\,g(t',t'')\,dt'=\delta(t-t''),\quad (t,t''\in T_1),$$

в непрерывном случае, вместо (6), имеем

$$\widetilde{s}(t)=s(t)+\iint_{T_1} r(t,\tau)\,g(\tau,\tau')\,x(\tau')\,d\tau\,d\tau';$$

$$\widetilde{r}(t,t')=r(t,t')-\iint_{T_1} r(\tau,\tau)\,g(\tau,\tau')\,r(\tau',t')\,d\tau\,d\tau'. \quad (10)$$

После аналогичной замены формула (8) принимает вид:

$$\widetilde{b}_q(t_1,\ldots,t_q)=\frac{1}{Z}\sum_{u=0}^{q}(-1)^u\sum{}'\int_{T_1}\ldots\int r(t_{\gamma_1},\tau_1)\ldots r(t_{\gamma_u},\tau_u)\,g(\tau_1,\tau_1')\ldots$$

$$\ldots g(\tau_u,\tau_u')\,d\tau_1\ldots d\tau_u\,d\tau_1'\ldots d\tau_u'\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}\int_{T_2}\ldots\int H^{(g)}_{\sigma_1\ldots\sigma_v}(y(\sigma_1),\ldots,y(\sigma_v))\times$$

$$\times\, b_{q+v}(t_{\alpha_1},\ldots,t_{\alpha_{q-u}},\tau_1',\ldots,\tau_u',\sigma_1,\ldots,\sigma_v)\,d\sigma_1\ldots\sigma_v; \quad (11)$$

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{T_1}\ldots\int H^{(g)}_{\tau_1\ldots\tau_n}(y(\tau_1),\ldots,y(\tau_n))\,b_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1,\ldots d\tau_n.$$

Здесь функция

$$y(\tau)=\int_{T_1} g(\tau,\sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma,\quad (\tau\in T_1) \quad (12)$$

решение интегрального уравнения

$$\int_{T_1} r(\sigma, \tau)\, y(\tau)\, d\tau = x(\sigma), \quad (\sigma \in T_1) \tag{13}$$

ое отыскание функции $g(\tau, \tau')$ или решение интегральных уравнений типа (13) может ь в ряде случаев проведено аналитическими методами (например, в случае, когда $t') = r(t - t')$ имеет рациональный спектр, и в случае соответствующих нестационар- обобщений).

Для нормального случайного процесса все квазимоментные функции равны нулю, $b_1(t) = m_1(t)$; $b_2(t, t') = k_2(t, t')$. Следовательно, равны нулю также все условные зимоментные функции при выборе образующих (10). Вследствие совпадения $\widetilde{b}_1(t)$, $t, t')$ с $\widetilde{m}_1(t)$, $\widetilde{k}_2(t, t')$ равенства (10) можно записать так:

$$\widetilde{m}_1(t) = m_1(t) + \iint_{T_1} k_2(t, \tau)\, g(\tau, \tau')\, x(\tau')\, d\tau\, d\tau';$$

$$\widetilde{k}_2(t, t') = k_2(t, t') - \iint_{T_1} k_2(t, \tau)\, g(\tau, \tau')\, k_2(\tau', t')\, d\tau\, d\tau'.$$

формулы совпадают с формулами линейного прогнозирования, оптимального по днеквадратичному критерию при гауссовых процессах. В случае негауссовых процес- конечно, дело обстоит сложнее. Результат оптимального прогнозирования по мини- му среднеквадратичной ошибки совпадает с апостериорным средним $\mathbf{M}_{\rho s}\xi(t)$ и для его еделения требуется вычислять $\widetilde{b}_1(t)$ по формуле (11) (при $q = 1$). При этом $\widetilde{m}_1(t)$ зывается нелинейной функцией от $x(\tau)$, $(\tau \in T_1)$.

Используя методы настоящей работы, можно не только совершать оптимальное не- ейное прогнозирование, но и производить оптимальную нелинейную фильтрацию. я этого нужно несколько изменить данную вначале постановку задачи. Пусть име- ся два случайных процесса $\xi(t)$, $\eta(t)$, которые статистически полно описываются систе- квазимоментных функций [3], как смешанных, так и несмешанных:

$$b_{(m)\eta,\,(n)\xi}(t_1, \ldots, t_m, t'_1, \ldots, t'_n), \quad (m;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

образующих функциях $s_\eta(t)$, $s_\xi(t')$, $r_{\eta\eta}(t_1, t_2)$, $r_{\eta\xi}(t_1, t'_2)$; $r_{\xi\xi}(t'_1, t'_2)$.

числу образующих функций, естественно, добавилась смешанная образующая функция $_\xi(t, t')$.

Требуется найти апостериорные квазимоментные функции процесса $\eta(t)$ при усло- и, что реализации процесса $\xi(t') = s_\xi(t') + x(t')$ при $t' \in T_1$ заданы.

В данном случае характеристическая функция совместного распределения случай- к величин $\eta(t_1), \ldots, \eta(t_k)$, $\xi(t'_1), \ldots, \xi(t'_l)$ определяется выражением (см. [3]):

$$\theta(u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_l) = \exp\Big[i \sum_\alpha s_\eta(t_\alpha)\, u_\alpha + i \sum_\beta s_\xi(t'_\beta)\, u'_\beta +$$

$$+ \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\gamma} r_{\eta\eta}(t_\alpha, t_\gamma)\, u_\alpha u_\gamma + i^2 \sum_{\alpha,\beta} r_{\eta\xi}(t_\alpha, t'_\beta)\, u_\alpha u'_\beta + \frac{i^2}{2} \sum_{\beta,\delta} r_{\xi\xi}(t'_\beta, t'_\delta)\, u'_\beta u'_\delta \Big] \times$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_m} u'_{\beta_1} \ldots u'_{\beta_n} b_{(m)\eta,\,(n)\xi}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_m}, t'_{\beta_1}, \ldots, t'_{\beta_n}).$$

к. дальнейшее исследование с точностью до обозначений повторяет предыдущее, то не будем его приводить. Окончательные результаты также аналогичны с той лишь ницей, что вместо функций $r(t, \tau)$, $r(\tau, \tau')$, $b_{u+v}(t_1, \ldots, t_u, \tau_1, \ldots, \tau_v)$, $(\tau, \tau', \tau_i \in T_1)$ дят соответственно $r_{\eta\xi}(t, \tau)$, $r_{\xi\xi}(\tau, \tau')$, $b_{(u)\eta,\,(v)\xi}(t_1, \ldots, t_u, \tau_1, \ldots, \tau_v)$.

Выражение для b_η (в континуальном случае, когда T_1 — отрезок) имеет в
($\| g(\sigma, \tau) \| = \| r_{\xi\xi}(\sigma, \tau) \|^{-1}$, $(\sigma, \tau \in T_1)$).

$$\widetilde{b}_\eta(t) = \frac{1}{Z} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \int_{T_1} \dots \int H^{(g)}_{\tau_1 \dots \tau_v}(y(\tau_1), \dots, y(\tau_v))\, b_{\eta,(v)\xi}(t, \tau_1, \dots, \tau_v)\, d\tau_1 \dots d\tau_v -$$

$$- \frac{1}{Z} \int_{T_1} r_{\eta\xi}(t, \sigma)\, g(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \int_{T_1} \dots \int H^{(g)}_{\tau_1 \dots \tau_v}(y(\tau_1), \dots, y(\tau_v)) \times$$

$$\times\, b_{(v+1)\xi}(\tau, \tau_1, \dots, \tau_v)\, d\tau_1 \dots d\tau_v.$$

Найденное апостериорное среднее $\widetilde{s}_{\eta_0}(t) + \widetilde{b}_\eta(t)$ есть решение общей задачи нелине
ной фильтрации (по минимуму среднеквадратичной погрешности) в том виде, как о
сформулирована в работе [2], но другим способом. Вопрос о точности фильтрации св
дится к вычислению апостериорной дисперсии

$$\widetilde{k}_{\eta\eta}(t, t) = \widetilde{r}_{\eta\eta}(t, t) + \widetilde{b}_{\eta\eta}(t, t) - [b_\eta(t)]^2.$$

Приведенное решение особенно удобно в том случае, когда рассматриваемые процес
не сильно отличаются от нормальных.

Поступила в редакцию
15.3.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение случа
ных функций через линейные системы, Автоматика и телемеханика, **14**, 2 (1953
144. Корреляционные функции в теории броуновского движения, ЖЭТФ, **26** (1954
189.

[2] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение случа
ных функций через нелинейные системы. Автоматика и телемеханика, **14**, 4 (1953
375; **15**, 3 (1954), 200.

[3] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Квазимоментн
функции в теории случайных процессов, ДАН СССР, **94**, 4 (1954), 615; Теория ве
ят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 84.

[4] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, К математической теории коррелир
ванных случайных точек, Известия АН СССР, Сер. матем., **20** (1960), 167.

[5] Р. Л. Стратонович, Теория коррелированных случайных точек и ее применен
к расчету шумов, возбуждаемых электронными потоками, Диссертация (1956).

SOME PROBLEMS WITH CONDITIONAL PROBABILITY AND QUASIMOMENT FUNCTIONS

P. I. KUZNETSOV, R. L. STRATONOVICH, V. I. TIHONOV (MOSCOW)

(Summary)

General formulas are obtained for aposteriori quasimoment functions and, cons
quently, for semi-invariants. These formulas enable forecasting and filtration proble
to be solved. The solution is expressed in the form of series through a priori quasimom
functions and Hermite's multidimensional polynomials. The conditions for convergence
these series are not investigated.

О КОНТИНУАЛЬНЫХ СРЕДНИХ И СИНГУЛЯРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Е. М. ПОЛИЩУК

Заметка посвящена изучению свойств среднего от функционала по функциональным областям общего вида. Важный для приложений случай среднего по функциональной сфере в пространстве L_2 рассматривается в [1] и [2]. Некоторые результаты, относящиеся к другому случаю, имеются в [3] и [4].

1. Пусть $D = \{x(t)\}$ — некоторое множество функций $x(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, которое будем называть функциональной областью. Пусть

$$T = \begin{Vmatrix} t_1^1, & t_2^1, & \ldots, & t_{k_1}^1 \\ t_1^2, & t_2^2, & \ldots, & t_{k_2}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

$$(t_1^n < t_2^n < \ldots < t_{k_n}^n, \; n = 1, 2, \ldots, \; k_1 < k_2 < \ldots)$$

— «матрица», определяющая бесконечную последовательность разбиений промежутка $(0, 1)$. Мы будем предполагать, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_i (t_i^n - t_{i-1}^n) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, k_n)$$

Каждой строке «матрицы» T отвечает множество D_n «простых функций» $x_n(t)$ области D, которое можно построить тем или иным способом. Можно, например, считать, что $x_n(t)$ — ступенчатая функция со значениями $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{k_n}^n$, где x_i^n — среднее (или среднее квадратическое) значение функции $x(t)$ на промежутке (t_{i-1}^n, t_i^n). При варьировании $x(t)$ в области D будем рассматривать x_i^n как случайные величины, имеющие соответственно функции распределения $\{\varphi_{n,i}\}$, заданные равенствами

$$\varphi_{n,i} = \frac{\operatorname{mes}_{D_n} \{x_i^n < u\}}{\operatorname{mes} D_n}.$$

(Здесь и всюду D_n — k_n-мерное многообразие точек $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{k_n}^n$).

Мы будем предполагать область D такой, что x_i^n $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ независимы друг от друга, или асимптотически независимы при $n \to \infty$, и что при $t_{i_n}^{\nu_n} \to t$ ($t_{in}^{\nu n}$ — элементы «матрицы» T) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\nu_n i_n}(u, t_{i_n}^{\nu_n}) = \varphi(u, t),$$

причем сходимость имеет место в полосе $-\infty < u < \infty$, $0 < t < 1$ почти для всех t. При сделанных допущениях мы скажем, что область D имеет функцию распределения $\varphi(u, t)$.

Если $\varphi_{n,i}$ не зависит от t_i^n (зависит лишь от n), то $\varphi(u, t)$ не зависит от t. В этом случае мы скажем, что D — область первого рода. В общем случае будем говорить, что D — область второго рода.

2. Функциональные области, которые мы имеем в виду, могут быть заданы в виде многообразия размерности ω: $U[x(t)] < 1$, или в виде многообразия размерности $\omega - 1$ («поверхности»): $U[x(t)] = 1$.

Здесь U — некоторый функционал класса $\mathfrak{F}$ (см. ниже). Ограничимся двумя примерами.

1) D — «эллипсоид»: $\int_0^1 \frac{(x(t) - a(t))^2}{k(t)}\, dt = 1$ (функции $a(t)$, $k(t)$ заданы, $k(t) > 0$).

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi k(t)}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{(u-a(t))^2}{2k^2(t)}\right) du \quad \text{(область } D \text{ второго рода)}$$

2) $D\colon \int_0^1 \exp(2x(t))\,dt = R^2$ $(R = \text{const})$ $\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Ru} \exp\left(-\frac{\ln^2 u}{2R^2}\right)$ (область D первого рода).

Мы будем предполагать все функции $x(t)$ измеримыми. Остальные их свойства (суммируемость и т. п.) не оговариваются и определяются единственно их принадлежностью области D. Мы скажем, что функционал $\Phi[x(t)]$, определенный в функциональной области D, принадлежит классу $\mathfrak{F}$, если он в этой области может быть представлен в виде равномерно сходящегося ряда $\sum_{p=1}^{\infty} F_p[x(t)]$, где

$$F_p[x(t)] = \int_0^1 \dots \int_0^1 g_p(x(t_1), \dots, x(t_p); t_1, \dots, t_p)\,dt_1 \dots dt_p.$$

Здесь g_p — заданные функции, подчиненные, разумеется, условию существования функционала F_p в области D.

3. Поскольку мы рассматриваем D_n как k_n-мерное многообразие, функционал F, определенный в области D_n, на множестве D_n сводится к функции $F[x_n(t)]$ переменных $x_1^n, \dots, x_k^n$: $F[x_n(t)] = f_n(x_1^n, x_2^n, \dots, x_{k_n}^n)$.

Средним $\mathbf{M}F$ функционала F по области D будем называть предел при $n \to \infty$ последовательности $\underset{D_n}{\mathbf{M}} f_n$ средних от функций $f_n(x_{k_1}^n, \dots, x_{k_n}^n)$ по областям D_n.

Пусть F — функционал вида:

$$F = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x(t_1), \dots, x(t_p))\,dt_1 \dots dt_p. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если средние* $\underset{D_n}{\mathbf{M}} f_n$ *существуют и область* D *имеет функцию распределения* $\varphi(u, t)$, *то среднее* $\underset{D}{\mathbf{M}}F$ *существует и*

$$\underset{D}{\mathbf{M}}F = \int_0^1 \dots \int_0^1 dt_1 \dots dt_p \int \dots \int g(\xi_1, \dots, \xi_p; t_1, \dots, t_p)\, d_{\xi_1}\varphi(\xi_1, t_1) \dots d_{\xi_p}\varphi(\xi_p, t_p) \tag{2}$$

$$\left(\textit{символ } \int \textit{ обозначает } \int_{-\infty}^{\infty}\right).$$

Этим самым устанавливается существование среднего от любого функционала класса $\mathfrak{F}$.

4. Аппроксимирующие функции $f_n(x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ функционала (1) могут быть представлены в виде

$$f_n = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{k_n} \lambda_{n;\,i_1,\dots,i_p} g(x_{i_1}^n, \dots, x_{i_p}^n;\ t_{i_1}^n, \dots, t_{i_p}^n), \tag{3}$$

где λ — постоянные коэффициенты. Из самого доказательства теоремы 1 можно видеть, что среднее $\mathbf{M}F$ (как и сам функционал F) не зависит от выбора матрицы T и коэффициентов λ.

Не уменьшая общности, можем считать, что все коэффициенты λ имеют в (3) один и тот же порядок $1/k_n$. Это обстоятельство приводит к следующей теореме:

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 функции* $g(x^n_{i_1}, \ldots, x^n_{i_p}; t^n_{i_1}, \ldots, t^n_{i_p})$, *рассматриваемые как случайные величины, имеют конечные дисперсии, то функционал почти везде (с вероятностью 1) равен своему среднему значению* $\mathbf{M}F$.

Равенство $F = \mathbf{M}F$ (почти везде) остается в силе для любого функционала класса $\mathfrak{F}$.

5. Предыдущая теорема, показывающая, что рассматриваемое нами среднее связано только с собственным, но и с сингулярным распределением, естественно приводит следующему вопросу.

Пусть $\{F\}$ — некоторый класс функционалов, определенных в функциональной области D. Существует ли в этой области такая «точка» $x_0(t)$, что для любого функционала F из $\{F\}$ имеет место равенство $\underset{D}{\mathbf{M}}F = F[x_0(t)]$?

Будем называть $x_0(t)$ «точкой концентрации массы» в области D. Обозначим $\eta(u)$ функцию распределения функции $x(t)$: $\eta(u) = \underset{0,1}{\text{mes}}\{x(t) < u\}$. Мы скажем, что F — функционал класса $\mathfrak{F}_0$, если для любых двух функций $x(t)$ и $y(t)$, имеющих одну и ту же функцию распределения, имеет место равенство $F[x(t)] = F[y(t)]$.

Теорема 3. *Пусть D — область первого рода и $\varphi(u)$ — ее функция распределения. Если F — функционал класса $\mathfrak{F}_0$, непрерывный в точке $w(t)$, где $w(t)$ — функция, обратная функции $\varphi(u)$, то среднее $\underset{D}{\mathbf{M}}F$ существует и равно $F[w(t)]$.*

6. Пусть

$$1 = \alpha^n_0 < \alpha^n_1 < \ldots < \alpha^n_{k_n} = 1 \tag{4}$$

разбиение промежутка $[0,1]$, которое обозначим τ_n.

Обозначим $\gamma_n(t)$ функцию, определенную условием: $\gamma_n(t)$ в промежутке α^n_{i-1}, $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ равна соответственно $(t - \alpha_{i-1})/(\alpha_i - \alpha_{i-1})$, либо $(\alpha_i - t)/(\alpha_i - \alpha_{i-1})$. Легко доказывается лемма: какова бы ни была последовательность (4), функции $x(t)$ и $x(\gamma_n(t))$ одинаково распределены.

Пусть имеется последовательность разбиений вида (4) такая, что $\max_i(\alpha^n_i < \alpha^n_{i-1}) = 0$, и пусть задана соответствующая последовательность функций $\gamma_n(t)$. Условимся говорить, что формальное равенство $\lim_{n\to\infty}\gamma_n(t) = \gamma_\infty(t)$ определяет несобственную функцию $\gamma_\infty(t)$. Все возникающие, таким образом, несобственные функции ниже отождествляем между собой. Используя набор «пилообразных» функций $\gamma_n(t)$, $\gamma_\infty(t)$, можем, опираясь на известную теорему Л. С. Понтрягина о структуре коммутативных топологических групп, сформулировать такое предложение:

Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная локально компактная, связная, локально связная коммутативная топологическая группа. Существует группа G преобразований в себя множества измеримых функций, заданных на промежутке 0,1, обладающая следующими свойствами:

1) G изоморфна группе $\mathfrak{G}$,

2) Если S — любой элемент из G, а $x(t)$ — произвольная измеримая функция, то $y(t) = Sx(t)$ и $x(t)$ одинаково распределены и различаются на множестве положительной меры.

Для функционалов класса $\mathfrak{F}_0$ по теореме 3 и приведенной лемме имеют место равенства $\underset{D}{\mathbf{M}}F = F[w(t)] = F[Sw(t)]$, из которых вытекает

Теорема 4. *Существует группа, не меняющая среднего значения функционала класса $\mathfrak{F}_0$ по области первого рода, изоморфная группе $\mathfrak{G}$.*

Заметим, что если в равенстве (1) g не содержит непосредственно переменных $t_1, \ldots, t_p$, то F — функционал класса $\mathfrak{F}_0$. Для этого случая теорема 4 может быть получена из формулы (2).

7. Мы скажем, что функционал F, определенный в области D, принадлежит классу $\mathfrak{F}_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие $\delta > 0$ и n_0, что при $n > n_0$ из неравенств *

* $\text{mes}\{\ldots\}$ — мера множества точек промежутка $\alpha^n_{i-1} < t < \alpha^n_i$, для которых $\alpha^n_{i-1}, \alpha^n_i$ выполняется неравенство, стоящее в фигурных скобках.

$$\left| \underset{\alpha_{i-1}^n,\ \alpha_i^n}{\text{mes}} \{x(t) < u\} - \underset{\alpha_{i-1}^n,\ \alpha_i^n}{\text{mes}} \{w(\gamma_n(t)) < u\} \right| < \frac{\delta}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, k_n)$$

следует $|F[x(t)] - F[w(\gamma_n(t))]| < \varepsilon$.

Здесь w — функция, обратная функции распределения φ области D, зависящая дл области второго рода, кроме того, от параметра t' $(0 \leqslant t' \leqslant 1)$, который мы не выпис ваем, а γ_n — определенная выше пилообразная функция, построенная для разбиения пр межутка 0,1.

Определяя класс $\mathfrak{F}_1$, мы предполагаем, что функционал $F[x(t)]$ определен по непр рывности в «точке» $w(\gamma_\infty(t))$. Как было сказано выше, все «точки» $\gamma_\infty(t)$ мы отожд ствляем.

Теорема 5. *Если F — функционал класса $\mathfrak{F}_1$, то среднее* $\underset{D}{\mathbf{M}}F$ *существует*

$\underset{D}{\mathbf{M}}F = F[w(\gamma_\infty(t))]$.

Примечание. Легко показать, что для функционалов, не принадлежащих клас $\mathfrak{F}_0$, нет собственных точек концентрации массы даже для области первого рода и ч область второго рода вообще не имеет собственных точек концентрации. Теорема показывает, таким образом, что для более общего, чем $\mathfrak{F}_0$, класса функционалов суш ствует *несобственная* точка концентрации.

Для функционалов класса $\mathfrak{F}$ (см. п. 2) теорема 5 может быть получена из форм лы (2). Для этого достаточно в ней произвести замену переменных $\theta_k = \int_{-\infty}^{\xi_k} d_{\xi_k}\varphi(\xi_k,$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ и применить к некоторой функции $h(\theta_1, \ldots, \theta_p; t_1, \ldots, t_p)$, изм римой в кубе $0 \leqslant \theta_k \leqslant 1$, $0 \leqslant t_k \leqslant 1$, формулу:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 dt_1 \ldots dt_p \int_0^1 \cdots \int_0^1 h(\theta_1, \ldots, \theta_p; t_1, \ldots, t_p)\, d\theta_1 \ldots d\theta_p =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 h(\gamma_\infty(t_1), \ldots, \gamma_\infty(t_p); t_1, \ldots, t_p)\, dt_1 \ldots dt_p.$$

8. В функционале F функция $x(t)$ и ее аргумент t играют совершенно различну роль. Это различие, однако, исчезает при переходе к среднему $\mathbf{M}F$: в формуле (переменные $\xi_1, \ldots, \xi_p$ и $t_1, \ldots, t_p$ в сущности равноправны. Названное обстоятел ство позволяет построить группу Γ, меняющую свойства функционала, но не меняющу его среднего значения.

Для функциональной области $a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)$, которой отвечает функция ра пределения

$$\frac{u - a(t)}{b(t) - a(t)},$$

эта группа построена в заметке [5]. В общем случае группа Γ строится аналогичн нужно лишь заменить функцию (5) функцией $\varphi(u, t)$ распределения области D. Сво ства группы Γ следующие:

1) Γ дискретна и может быть представлена в виде прямого произведения конечно или бесконечного числа групп восьмого порядка (таблица их приведена в [5]).

2) Элементы группы Γ могут быть истолкованы как отражения некоторых повер ностей. Эти поверхности, если D — область первого рода, цилиндрические.

Поступила в редакцию
12.4.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Levy, Lecons d'analyse fonctionnelle, Paris, 1922.
[2] P. Levy, Les problemes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951.
[3] Е. М. Полищук, О среднем значении функционала, Успехи матем. наук, **10**, (1955), 64, 179—186.

Е. М. Полищук, Среднее значение и интеграл от функционала, Укр. матем. ж., 8, 1 (1956), 59—75.
Е. М. Полищук, О группах, не меняющих среднего значения функционала, Вестник Ленинградского университета, 1, 1 (1957), 175—179.

ON CONTINUAL MEANS AND SINGULAR DISTRIBUTIONS

E. M POLIŠČUK (LENINGRAD)

(Summary)

In this paper properties of mean of functional on the general functional fields are vestigated.

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ Б. В. ГНЕДЕНКО

В. М. ЗОЛОТАРЕВ, В. С. КОРОЛЮК

1. История вопроса. Несколько лет назад академиком Б. В. Гнеденко была выска-ана гипотеза следующего содержания. Пусть $\zeta_n = \frac{1}{B_n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) - A_n$ — последова-ельность сумм независимых случайных величин, имеющих при надлежащем выборе нор-ирующих постоянных ($B_n \to \infty$) собственное предельное распределение $G(x)$*. Если реди распределений случайных слагаемых ξ_i встречаются только s различных, то пре-ельное распределение $G(x)$ представляет собой композицию не более чем s устойчивых аконов.

Это утверждение было доказано Е. К. Лебединцевой [2] в предположении, что од-о из s возможных распределений слагаемых ξ_i принадлежит или области полного при-яжения устойчивого закона, или области частичного притяжения только одного типа как известно [1], в этом случае тип должен быть устойчивым). Тем самым гипотеза олучила веское подтверждение. Однако, как показывает приводимый далее пример, тео-ема Лебединцевой не охватывает всего многообразия случаев и потому не снимает во-роса о справедливости гипотезы в целом.

В настоящей заметке дается положительное решение гипотезы Б. В. Гнеденко для лучая $s = 2$.

2. Вспомогательные сведения. Мы приведем, ссылаясь на [1], несколько существенных ля дальнейшего изложения фактов из общей теории суммирования независимых слу-айных величин.

I. Безгранично делимые законы $G(x)$ класса L задаются своими характеристическими ункциями $f(t)$ (формула П. Леви):

$$\log f(t) = it\gamma - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dH(u),$$

де γ и σ — вещественные параметры, а функция $H(u)$ (она называется спектральной) определена на полуосях $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, $H(-\infty) = H(\infty) = 0$ и обладает следующими свойствами:

а) $H(u)$ не убывает на полуосях определения, и $|uH(u)| \in L(-1, 1)$;

б) имеет односторонние производные в каждой точке $u \neq 0$, и функция $uH'(u)$ (под H' понимается любая из производных) не возрастает на полуосях определения.

II. Устойчивым законам распределения соответствуют элементы γ, $\sigma^2 > 0$ и $H(u) \equiv 0$

* Появляющиеся при этом предельные распределения образуют среди безгранично елимых законов так называемый класс L.

(нормальный закон) или же γ, $\sigma^2 = 0$ и $H(u) = (c_1 + c_2 \operatorname{sgn} u)\,|u|^{-\alpha}$, где $c_1 + c_2 \geqslant$ $c_1 - c_2 \geqslant 0$ и $0 < \alpha < 2$.

III. Участвующие в нормировке сумм ζ_n константы B_n таковы, что $B_n \sim B_{n+1}$ при $n \to$

IV. Для того чтобы функции распределения $F_n(x)$ надлежащим образом норми ванных сумм ζ_n сходились бы при $n \to \infty$ к закону $G(x)$ класса L, определяемо элементами $\gamma = 0$, σ^2, $H(u)$, необходимо и достаточно выполнение следующих услов При $n \to \infty$

а) в точках x непрерывности функции $H(u)$ при $n \to \infty$

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (F_{\xi_i}(B_n x) - E(x)) \to H(x),$$

б)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} D_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} D_n(\varepsilon) = \sigma^2,$$

где $D_n(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2\, dF_{\xi_i}(B_n x) - \left(\int\limits_{|x| < \varepsilon} x\, dF_{\xi_i}(B_n x) \right)^2 \right\}$, и $E(x)$ — несоб венная функция распределения.

3. Построение примера к теореме Лебединцевой. Положим $\alpha = \frac{1}{\pi} \log 2$ и определ симметричные распределения

$$F_1(x) = 1 - F_1(-x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} (x\sqrt{2})^{-\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \sin \log x\right) & \text{для } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{2} & \text{для } \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant x \geqslant 0, \end{cases}$$

$$F_2(x) = 1 - F_2(-x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{-\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha} - \sin \log x\right) & \text{для } x > \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{для } \sqrt{2} \geqslant x \geqslant 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что обе функции являются монотонно возрастающими и непрер ными.

При построении последовательности нормированных сумм ζ_n будем руководствовать следующими правилами (символы $[a]$, $\{a\}$ обозначают соответственно целую и дробну часть числа a): в сумме ζ_n случайные слагаемые ξ_i с распределением F_1 берутся в числе n_1 $= 2\left[\frac{n}{3}\right]$, а слагаемые с распределением F_2 — в числе $n_2 = \left[\frac{n}{3}\right] + 3\left\{\frac{n}{3}\right\}$; $A_n = 0$ и B_n^{α} $= \frac{4}{3} n + 2\left\{\frac{n}{3}\right\}$.

Докажем существование предельного распределения сумм ζ_n, опираясь на утверж ние IV предыдущего пункта. Нетрудно подсчитать, что при $n \to \infty$

$$H_n(x) = n_1 (F_1(B_n x) - E(x)) + n_2 (F_2(B_n x) - E(x)) \to -\frac{1+\alpha}{2\sqrt{2}} |x|^{-\alpha} \operatorname{sgn} x$$

и

$$D_n(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 H_n(\varepsilon) - 2 \int\limits_{|x| < \varepsilon} x H_n(x)\, dx \to Q(\varepsilon) \leqslant \frac{18}{2-\alpha} \varepsilon^{2-\alpha}.$$

Таким образом, ζ_n имеет предельное устойчивое распределение с параметрами $\gamma =$ $\beta = 0$ и $\alpha < 1$. Покажем теперь, что ни одна из функций $F_j(x)$ не удовлетворяет усл виям теоремы Лебединцевой. То, что ни одна из функций F_j не принадлежит облас полного притяжения какого-либо устойчивого закона, видно по их асимптотическому п ведению на бесконечности. Распределения F_j не могут принадлежать области частично притяжения нормального закона, поскольку для них не выполнен необходимый и дост

точный критерий П. Леви ([1], стр. 204):

$$I(F_j) = \lim_{X \to \infty} \frac{U_j(X)}{V_j(X)} = 0, \ (j = 1, 2),$$

где $U_j(X) = X^2(1 - F_j(X))$, $V_j(X) = \int\limits_{|v| \leqslant X} v^2 \, dF_j(v)$ при $X \to \infty$.

Действительно, так как $U_j(X)$ и $V_j(X)$ стремятся к бесконечности, то, используя аналог правила Лопиталя для нижних пределов, сравнительно просто можно подсчитать, что $I(F_j) > 0$. Например, для $F_1(x)$:

$$I(F_1) \geqslant \lim_{X \to \infty} \frac{U_j'(X)}{V_j'(X)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{\alpha} + \sin T}{1 - \cos T + \alpha(1 + \sin T)} - 1 = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}}{\alpha(\sqrt{1 + 2\alpha} - 1)} - 1 > 0.$$

Если же $F_j(x)$ принадлежит области частичного притяжения устойчивого негауссовского типа, то на основании утверждений IV, II предыдущего пункта можно утверждать, что для каждого значения $x \neq 0$ найдутся такие последовательности чисел $C_k \to \infty$ и (целых) $m_k \to \infty$, для которых

$$m_k(F_j(C_k x) - E(x)) = -b_j |x|^{-\beta_j} \operatorname{sgn} x + o(1), \ b_j > 0, \ 0 < \beta_j < 2;$$

левую часть этого равенства можно представить в виде

$$-R_k |x|^{-\alpha} \operatorname{sgn} x \left(1 + \frac{1}{\alpha} - (-1)^j \sin(D_k + \log x)\right).$$

Поскольку это представление должно иметь место для любых подпоследовательностей выделенных последовательностей чисел R_k и D_k, то, выбирая среди них сходящиеся к конечному или бесконечному пределу и рассматривая поочередно возможные случаи, мы без труда убедимся в противоречивости исходного представления при $b_j \neq 0$.

4. Доказательство основного результата. Пусть слагаемые ξ_i в нормированных суммах ζ_n подчинены одной из двух функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$. Обозначим r_{1n}, r_{2n} число слагаемых в ζ_n, подчиненных соответственно распределениям F_1 и F_2. Рассмотрим функцию

$$H_n(x) = r_{1n}(F_1(B_n x) - E(x)) + r_{2n}(F_2(B_n x) - E(x)).$$

Мы можем предполагать, что ζ_n имеет собственное предельное распределение, отличное от нормального (иначе нам нечего было бы доказывать). Отсюда на основании утверждения IV пункта 2, функция $H_n(x)$ должна слабо сходиться при $n \to \infty$ к некоторой ненулевой спектральной функции $H(x)$, и нашей задачей будет установление вида этой функции. Утверждение III пункта 2 позволяет для любого $q > 0$ поставить в соответствие числам n натурального ряда такие натуральные $n(q)$, что $n(q)$ возрастают с ростом n и $B_n \sim qB_{n(q)}$. Такое соответствие устанавливается, конечно, неоднозначно. Нам важно отметить, что такой выбор существует и что замена выбранных $n(q)$ на $n'(q)$, отличающихся от $n(q)$ не более, чем на фиксированную постоянную, приводит нас к последовательности, обладающей тем же свойством, т. е. $B_n \sim qB_{n'(q)}$.

Функция $H_n(x)$ может быть представлена в виде

$$H_n(x) = a_1 H_{n(q)}\left(x \frac{B_n}{B_{n(q)}}\right) + a_2 H_{n(q^2)}\left(x \frac{B_n}{B_{n(q^2)}}\right) +$$

$$+ (r_{1n} - a_1 r_{1n(q)} - a_2 r_{1n(q^2)}) F_1(B_n x) + (r_{2n} - a_1 r_{2n(q)} - a_2 r_{2n(q^2)}) F_2(B_n x). \quad (1)$$

Обозначим $\Delta = \Delta(n(q), n(q^2))$ — определитель системы, которой мы определяем значе

ния a_1 и a_2:

$$a_1 r_{1n(q)} + a_2 r_{1n(q^2)} = r_{1n}$$
$$a_1 r_{2n(q)} + a_2 r_{2n(q^2)} = r_{2n}$$

За счет отмеченной выше возможности варьирования последовательности $\{n(q)\}$ (и не зависимо от этого, последовательности $\{n(q^2)\}$) можно добиться, очевидно, того, что Δ будет отлично от нуля для всех значений проварьированных последовательностей (точнее —их пар). Так, например, $\Delta(n(q)+1, n(q^2)) = \Delta(n(q), n(q^2)) + r$, где $r = r_{2n(q^2)}$ или $r = -r_{1n(q^2)}$, но по самой постановке задачи ясно, что обе эти частоты появления распределений отличны от нуля для достаточно больших n. Таким образом, мы вместо (1) имеем

$$H_n(x) = a_1 H_{n(q)}\left(x\frac{B_n}{B_{n(q)}}\right) + a_2 H_{n(q^2)}\left(x\frac{B_n}{B_{n(q^2)}}\right), \qquad (2$$

где a_1, a_2 после выбора и фиксирования нужных нам последовательностей $n(q)$, $n(q^2$ целиком определяются по n и q. Четырехзначный вектор $(\operatorname{sgn} a_1, \operatorname{sgn} a_2)$ естественным образом разделяет натуральный ряд чисел на четыре конечные или бесконечные непересекающиеся последовательности, сохраняющие значение этого вектора. Выберем среди них любую бесконечную последовательность (такая, конечно, найдется) $\{n'\}$. Разделим обе части равенства (2) на величину $a = \max(1, |a_1|, |a_2|)$ и обозначим $\beta_{0n} = \frac{1}{a}$, $\beta_{1n} = -\frac{a_1}{a}$, $\beta_{2n} = -\frac{a_2}{a}$. Так как $H_n(x) \Rightarrow H(x)$, $B_n/B_{n(q)} \to q$ и $B_n/B_{n(q^2)} \to q^2$ по любой последовательности натуральных чисел, то за счет выбора специальной подпоследовательности $\{n''\}$ из уже выделенной выше последовательности $\{n'\}$ можно добиться сходимости коэффициентов β_{jn} к конечным пределам β_j $(j = 0, 1, 2)$ (заметим, что β_j зависят вообще говоря, от q). Предельный переход по подпоследовательности $n'' \to \infty$ приводит нас в конечном счете к функциональному уравнению для функции H

$$\beta_0 H(x) + \beta_1 H(qx) + \beta_2 H(q^2 x) = 0, \qquad (3$$

справедливому для всех $q > 0$ и тех x, которые вместе с qx и q^2x являются точками непрерывности H.

Пусть $q \neq 1$, тогда, полагая

$$z = -\frac{\log|x|}{\log q} \quad \text{и} \quad v(z) = v(z, \operatorname{sgn} x) = H(q^{-z}\operatorname{sgn} x),$$

мы сводим уравнение (3) к разностному уравнению второго порядка (точнее —к двум: одно для $x > 0$, другое для $x < 0$). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $\beta_0\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2 = 0$. Обозначим λ_1, λ_2 корни этого уравнения (естественно они зависят от q) и рассмотрим возможные a priori случаи. При этом достаточно рассматривать положительные x.

а) Корни комплексные. Обозначая $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ и $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, мы можем записать функцию $v(z)$ в виде $v(z) = c_1\rho^z\cos\theta z + c_2\rho^z\sin\theta z$. Отсюда, полагая $\gamma = \frac{\log\rho}{\log q}$ и $\mu = \frac{\theta}{\log q}$ имеем

$$H(x) = (c_1\cos(\mu\log x) + c_2\sin(\mu\log x))\, x^{-\gamma}. \qquad (4$$

Используя такие свойства функции H как неположительность (для $x > 0$), обращение в нуль на бесконечности и $x^\gamma H(x) = o(1)$ (последнее видно из самого представления (4)), находим, что величины γ, μ не зависят от q и, кроме того, $\gamma > 0$, $\mu = 0$. В итоге, представление (4) принимает вид $H(x) = c_1 x^{-\gamma}$.

б) Корни — вещественные, равные. Рассуждения, аналогичные тем, что проводились в предыдущем случае, показывают, что имеет место представление $H(x) = (c_1 + c_2\log x)\, x^{-\gamma}$

котором c_1, c_2 и γ не зависят от q. Условие неположительности H при $x>0$ влечет собой $c_2=0$, и, следовательно, функция H представима в конечном счете, в той же орме, что и в предыдущем случае.

в) Корни вещественные, различные. В этом случае те же соображения дают для (x) представление, включающее в качестве частного случая предыдущие:

$$H(x)=c_1x^{-\gamma_1}+c_2x^{-\gamma_2}$$

еличины c_1, c_2 и γ_1, γ_2 по-прежнему не зависят от q). Условие $|xH(x)|\in L(-1,1)$ в мках полученного представления эквивалентно неравенствам $\gamma_j<2$, а неположитель-сть при $x>0$ — неравенствам $c_j\leqslant 0$. Так как величина γ_j определяется исключитель- корнями характеристического уравнения, которое будет одним и тем же как для учая $x>0$, так и для $x<0$, то представления функции $H(x)$, соответствующие этим учаям, могут различаться только величиной и знаком коэффициентов c_j. Резюмируя все азанное, мы вправе написать для функции H следующее представление ($0<\gamma_j<2$, $_1+c_{j2}\leqslant 0$, $c_{j1}-c_{j2}\geqslant 0$):

$$H(x)=(c_{11}+c_{12}\operatorname{sgn}x)\,|x|^{-\gamma_1}+(c_{21}+c_{22}\operatorname{sgn}x)\,|x|^{-\gamma_2}. \tag{5}$$

Согласно утверждению II пункта 2, функция (5) соответствует, вообще говоря, ком- озиции двух устойчивых законов, не считая нормальной компоненты. Для доказатель- ва гипотезы Б. В. Гнеденко нам остается показать еще, что нормальная составляющая сутствует, если в (5) присутствуют составляющие двух устойчивых распределений с раз- ичными значениями γ_j (т. е. $\gamma_1\neq\gamma_2$). При этом можно предполагать, что оба исходных спределения $F_j(x)$ имеют бесконечные вторые моменты, ибо в противном случае все одится к применению теоремы Лебединцевой. Мы не будем останавливаться на дока- тельстве равенства $\sigma^2=0$, поскольку с учетом сделанного предположения оно прово- ится тем же путем, что и аналогичное доказательство в теореме 2 § 35 [1].

5. Замечания. Распространение проведенных выше рассуждений на случай $s>2$ не стречает затруднений вплоть до построения функционального уравнения для $H(x)$

$$\beta_0H(x)+\beta_1H(qx)+\ldots+\beta_sH(q^sx)=0, \tag{6}$$

нахождения его решения в самом общем виде. Однако «отфильтровать» случаи ком- лексных и кратных корней теми же методами не удается. Более того, опираясь только свойства спектральных функций класса, приводившиеся в пункте 2, этого вообще нель- сделать, как показывает следующий пример спектральной функции класса L, которая ляется решением некоторого функционального уравнения типа (6) со значением $s=3$:

$$H(x)=0,\ x<0;\ H(x)=-(9+\log^2x)\,x^{-1/2},\ x>0.$$

Некоторую надежду в этом отношении дает соображение, высказанное Ю. В. Про- оровым, о том, что кроме уравнения (6) можно тем же путем построить целую серию ункциональных уравнений вида (β_k здесь уже будут, конечно, другими):

$$\beta_0H(x)+\beta_1H(q^{k_1}x)+\ldots+\beta_sH(q^{k_s}x)=0,$$

е $1<k_1<k_2<\ldots<k_s$ — любые целые числа.

Поступила в редакцию
25.7.61

ЛИТЕРАТУРА

Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М.— Л., 1949.

Е. К. Лебединцева, О предельных распределениях для нормированных сумм независимых случайных величин, Доклады АН УССР, № 1, 1955.

ON A HYPOTHESIS PROPOSED BY B. V. GNEDENKO

V. M. ZOLOTAREV (MOSCOW), V. S. KOROLJUK (KIEV)

(Summary)

Several years ago Academician B. V. Gnedenko proposed the following:

Let $\zeta_n = \frac{1}{B_n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) - A_n$ be a sequence of normed sums of independent stochasti quantities having a nondegenerate limit distribution G(x) for appropriately selecte constants A_n and B_n. If among the distributions of stochastic quantities ξ_i there ar only s different ones, then the limit distribution G(x) is a composition of not more tha stable laws.

In the paper the hypothesis proposed by B. V. Gnedenko is proved for $s=2$ and a example is presented showing that the theorem by E. Lebedintseva [2] does not prov this hypothesis in all of its entirety.

О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ НЕКОТОРОГО УРОВНЯ СТАЦИОНАРНЫМ ГАУССОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Е. В. БУЛИНСКАЯ

В работах [1] и [2] приводятся формулы для среднего числа пересечений некоторог уровня стационарным случайным процессом, а в [3] — формула для среднего числа нулей но без строгого доказательства. В [4] приведено точное доказательство формулы дл среднего числа нулей в слишком специальном случае гауссовского процесса

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j (X_j \cos \lambda_j t + Y_j \sin \lambda_j t),$$

где X_j и Y_j — независимые гауссовские величины со средним 0 и дисперсией 1.

Сначала докажем общее утверждение, не требующее предположения, что процес гауссовский.

Теорема 1. *Если одномерная плотность процесса $\xi(t)$ ограничена и производна $\xi'(t)$ непрерывна, с вероятностью 1, то число пересечений $\xi(t)$ любого уровня и н отрезке $[a, b]$ конечно, с вероятностью 1, причем вероятность того, что $\xi(t)$ к сается уровня и равна 0.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим отрезок $[0, 1]$ значений t. Пуст $C^{(1)}[0, 1]$ — пространство функций, непрерывных вместе с производной на $[0, 1]$, и $\mathbf{P}$- вероятностная мера в $C^{(1)}[0, 1]$, соответствующая процессу $\xi(t)$. Обозначим $A_{h,n,}$ множество функций $x(t) \in C^{(1)}[0, 1]$, имеющих хотя бы в одной точке τ_x интерва $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ нуль производной $x'(\tau_x) = 0$, и для которых $|x(\tau_x) - u| \leqslant$ Тогда для $x(t) \in A_{h,n,k}$

$$x\left(\frac{k}{n}\right) = x(\tau_x) + \left(\frac{k}{n} - \tau_x\right) x'\left[\tau_x + \theta\left(\frac{k}{n} - \tau_x\right)\right],$$

и, следовательно, $\left|x\left(\frac{k}{n}\right) - u\right| \leqslant h + \frac{1}{n}\omega_{x'}\left(\frac{1}{n}\right)$, где $\omega_{x'}(\delta)$—модуль непрерывност производной, т. е.

$$\omega_{x'}(\delta) = \sup_{t', t'' \atop |t' - t''| \leqslant \delta} |x'(t') - x'(t'')|.$$

Пусть, далее, $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и B_ω — множество функций $x(t) \in C^{(1)}[0, 1]$, дл которых при всех δ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ удовлетворяется неравенство $\omega_{x'}(\delta) \leqslant \omega(\delta)$. Задади $\varepsilon > 0$. Тогда можно (см., напр., [5], гл. 1) выбрать функцию $\omega_\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ таку

то $\mathbf{P}(B_{\omega_\varepsilon}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Если $A_h = \{x(t)$: хотя бы в одной точке t_x отрезка $[0, 1]$ $(t_x) = 0, |x(t_x) - u| \leqslant h\}$, то

$$A_h = \bigcup_{k=1}^{n} A_{h,n,k},$$

$$\mathbf{P}\ A_h) \leqslant \sum_{k=1} \mathbf{P}(A_{h,n,k} \cap B_{\omega_\varepsilon}) + \mathbf{P}(\overline{B}_{\omega_\varepsilon}). \tag{1}$$

ервое слагаемое в правой части (1) не превосходит $cn\left[h + \frac{1}{n}\omega_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, где c — кон-анта, ограничивающая одномерную плотность $\xi(t)$. Как легко видеть, для любого > 0 можно подобрать такие n_0 и h_0, что эта величина не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, а так как $(\overline{B}_{\omega_\varepsilon}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то $\mathbf{P}(A_{h_0}) \leqslant \varepsilon$. Если $A = \{x(t) : x(t)$ не касается уровня u на отрезке $1]\}$, то $\overline{A} \subseteq A_h$ при любом h и, значит, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0$. Этим доказано, что процесс $t)$, с вероятностью 1, не касается уровня u на отрезке $[0, 1]$. Теперь для произволь-й $x(t) \in \overline{A}_{h_0}$ оценим расстояние l между двумя соседними пересечениями уровня u абсциссами t_1 и $t_2 > t_1$. Между t_1 и t_2 найдется нуль производной — точка t_0 такая, о $x'(t_0) = 0$. По выбору $x(t)$ будет выполнено неравенство $|x(t_0) - u| > h_0$. Проведем кущую через точки $(t_0, x, (t_0))$ и (t_2, u). Ее угловой коэффициент $\operatorname{tg}\varphi \geqslant \frac{h_0}{l}$. Между и t_2 найдется такая точка θ, что $\operatorname{tg}\varphi = |x'(\theta)|$. Но $|x'(\theta)| = |x'(\theta) - x'(t_0)|$, что превосходит $\omega_{x'}(l)$. Значит, для $x(t) \in \overline{A}_{h_0} \cap B_{\omega_\varepsilon}$ с вероятностью, не меньшей $-3\frac{\varepsilon}{2}$, выполнено неравенство

$$l\omega_\varepsilon(l) \geqslant h_0. \tag{2}$$

Оцениваем отсюда l, учитывая, что $cn_0\left[h_0 + \frac{1}{n_0}\omega_\varepsilon\left(\frac{1}{n_0}\right)\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Последнее соот-шение будет выполнено, если определить n_0 из неравенства $\frac{1}{n_0} \leqslant \omega_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4c}\right) < \frac{1}{n_0 - 1}$ зять $h_0 = \frac{\varepsilon}{4n_0 c}$. Ясно, что $\frac{1}{n_0} > \frac{1}{2}\omega_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4c}\right)$ и, следовательно, $h_0 \geqslant \frac{\varepsilon}{8c}\omega_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4c}\right)$. именяя (2), мы получим $l \geqslant \psi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{8c}\ \omega_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4c}\right)\right)$, где $\psi(l) = l\omega_\varepsilon(l)$. Таким образом, сло пересечений функцией $x(t) \in \overline{A}_{h_0} \cap B_{\omega_\varepsilon}$ уровня u на отрезке $[0, 1]$ не превос-дит $n(\varepsilon) = 1/l$, т. е. $\mathbf{P}\{x(t) : N_x(u) \geqslant n(\varepsilon)\} \leqslant 3\frac{\varepsilon}{2}$, где $N_x(u)$ — число пересечений $t)$ уровня u на отрезке $[0, 1]$. Отсюда вытекает $\mathbf{P}\{x(t) : N_x(u) = \infty\} = 0$.

Пусть теперь $\xi(t)$ — вещественный стационарный гауссовский процесс, $F(\lambda)$ — его ктральная функция, а $\mathcal{B}(\tau)$ — корреляционная функция. Как показано в [6], для рерывности производной стационарного гауссовского процесса достаточно условие: каком-либо $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \lambda^2 [\ln(1 + \lambda)]^{1+\alpha} dF(\lambda) < \infty. \tag{3}$$

Поэтому из теоремы 1 следует, что при выполнении условия (3) число пересечений $t)$ уровня u на отрезке $[a, b]$ конечно, с вероятностью 1.

Теорема 2. *Если для вещественного стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$ олнено условие* (3), *то для среднего числа пересечений $\xi(t)$ уровня u на отрезке* $1]$ *справедлива формула*

$$\mathbf{M}N_\xi(u) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\mathcal{B}''(0)}{\mathcal{B}(0)}\right)^{1/2} e^{-\frac{u^2}{2B(0)}}.$$

Доказательство. Разделим отрезок $[0, 1]$ на 2^n равных частей и на каждом участке $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ заменим $\xi(t)$ отрезком прямой, проходящей через точки $\left(\frac{k}{2^n}, \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$ и $\left(\frac{k+1}{2^n}, \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)$. Обозначим

$$\eta_n(t) = \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) + 2^n\left[\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\left(t - \frac{k}{2^n}\right),$$

при $\frac{k}{2^n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{2^n}$.

$N_\xi(u)$ — число пересечений $\xi(t)$ уровня u на отрезке $[0,1]$. $N_{\eta_n}(u)$ — число пересечений $\eta_n(t)$ уровня u на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что для любого n $N_{\eta_n}(u) \leqslant N_\xi(u)$. Кроме того, если $m > n$, то $N_{\eta_m}(u) \geqslant N_{\eta_n}(u)$ и при $n \to \infty$ $N_{\eta_n}(u) \uparrow N_\xi(u)$. Так как $N_\xi(u)$, а следовательно, и $N_{\eta_n}(u)$ конечно, то

$$N_{\eta_n}(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_\varepsilon(\eta_n(t)) \, |\eta_n'(t)| \, dt,$$

где

$$\varphi_\varepsilon(\eta_n(t)) = \begin{cases} 1 \text{ при } |\eta_n(t) - u| \leqslant \varepsilon, \\ 0 \text{ при } |\eta_n(t) - u| > \varepsilon. \end{cases}$$

$$\mathbf{M} N_{\eta_n}(u) = \mathbf{M} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_\varepsilon(\eta_n(t)) \, |\eta_n'(t)| \, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{M} \int_0^1 \varphi_\varepsilon(\eta_n(t)) \, |\eta_n'(t)| \, dt.$$

Можно поменять местами предел и математическое ожидание, так как при всех $\varepsilon > 0$ $\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_\varepsilon(\eta_n(t)) \, |\eta_n'(t)| \, dt \leqslant 2^n$. Сосчитаем

$$\mathbf{M} N_{\eta_n}(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |y| \, p_n(x, y) \, dx \, dy \, dt,$$

где

$$p_n(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D}} \exp\left\{-\frac{1}{2D}\left(B'' x^2 - 2B' xy + By^2\right)\right\}$$

и

$$B = \mathbf{M}\eta_n^2(t), \quad B' = \mathbf{M}[\eta_n(t)\,\eta_n'(t)], \quad B'' = \mathbf{M}[\eta_n'(t)]^2, D = BB'' - (B')^2.$$

Легко сосчитать, что при $\frac{k}{2^n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{2^n}$

$$B = \mathscr{B}(0)\left[(1 - 2^n t + k)^2 + (2^n t - k)^2\right] + 2\mathscr{B}\left(\frac{1}{2^n}\right)(2^n t - k)(1 - 2^n t + k),$$

$$B' = 2^n\left[(2^n t - k) - (1 - 2^n t + k)\right]\left[\mathscr{B}(0) - \mathscr{B}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right],$$

$$B'' = 2^{2n+1}\left[\mathscr{B}(0) - \mathscr{B}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right].$$

Так как

$$\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} p_n(x, y) \, dx \leqslant 2\varepsilon \max_x p_n(x, y),$$

$$\max_x p_n(x, y) = e^{-\frac{y^2}{2B''}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |y| e^{-\frac{y^2}{2B''}} dy < \infty,$$

о в (4) возможен переход к пределу по ε под знаком интеграла, и $M N_{\eta_n}(u) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} |y| p_n(u, y)\, dy\, dt$. Произведя интегрирование по y, мы получим

$$M N_{\eta_n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{D}}{B} e^{-u^2 \left\{ \frac{(B')^2}{2DB} + \frac{1}{2B} \right\}} + \frac{B'}{B^{3/2}} e^{\frac{u^2}{2B}} \int_0^{\frac{B'u}{\sqrt{DB}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] dt. \qquad (5)$$

Используя соотношение $\left| \int_0^b f(t)\, dt \right| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)| (b - a)$, легко показать, что $M N_{\eta_n}(u)$ граничено при любом n одной и той же постоянной. А так как $N_{\eta_n}(u) \uparrow N_\xi(u)$ и $M N_{\eta_n}(u)$ граничены, то $M N_\xi(u) = \lim_{n \to \infty} M N_{\eta_n}(u)$.

Можно переписать $M N_{\eta_n}(u) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) + o(1)$, где $f(t)$ — подынтегральное выражение в формуле (5). Разлагая $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ в ряд Тэйлора

$$\mathscr{B}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \mathscr{B}(0) + \mathscr{B}'(0) \frac{1}{2^n} + \mathscr{B}''(t_1) \frac{1}{2^{2n+1}} \qquad \left(0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2^n}\right)$$

и учитывая, что $B'(0) = 0$ в силу вещественности процесса $\xi(t)$, получим

$$\lim_{n \to \infty} M N_{\eta_n}(u) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\mathscr{B}''(0)}{\mathscr{B}(0)} \right)^{1/2} e^{-\frac{u^2}{2\mathscr{B}(0)}}.$$

Значит, доказано, что $M N_\xi(u) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\mathscr{B}''(0)}{\mathscr{B}(0)} \right)^{1/2} e^{-\frac{u^2}{2\mathscr{B}(0)}}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Прохорову за постановку задачи и ценные советы.

Поступила в редакцию
4.2.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., «Сов. радио», 1951.

[2] А. П. Хусу, О некоторых встречающихся в технике функционалах, заданных на процессах, Вестник ЛГУ, 1 (1956), 91—93.

[3] S. O. Rice, The Mathematical Analysis of Random Noise, Bell Syst. Techn. J., 23, 3 (1944), 282—332; 24, 1 (1945), 46—156. (Русский перевод в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИИЛ (1953), 88—239).

[4] U. Grenader, M. Rosenblatt, Statistical Analysis of Stationary time series, Stockholm, Almqwist & Wiksell, 1956.

[5] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., I, 2 (1956), 177—238.

[6] G. A. Hunt, Random Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 38—69. (Русский перевод в сборнике Математика, ИЛ, 2, 6 (1958), 87—114; Хант Г. А. «Случайные преобразования Фурье»).

ON THE MEAN NUMBER OF CROSSINGS OF A LEVEL BY A STATIONARY GAUSSIAN PROCESS

E. V. BULINSKAYA (MOSCOW)

(Summary)

Let $\xi(t)$ be a stationary Gaussian process and $N_\xi(u)$ denote the number of solutions of $\xi(t) = u$, $0 \neq t \neq 1$. We prove the well-known formula for $\mathbf{M}_\xi(u)$ under conditions that are very close to the necessary ones.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1960

Заседание 16 февраля

Сарманов О. В., Об одном методе исследования стационарных марковских процессов.

1. Рассматривается стационарный действительный процесс $\{x_t\}$ с непрерывным параметром t; предполагается, что $\mathbf{M}x_t = 0$ и $\mathbf{D}x_t = 1$. Обозначим $x_{t_1} = x$ и $x_{t_1+t} = y$.

Определение 1. $r_1(t)$ называется максимальной корреляционной функцией процесса, если при $t \neq 0$

$$|r_1(t)| = \sup_{f,g} |\mathbf{M}(f(x)\, g(y))| \tag{1}$$

в классе функций f, g, удовлетворяющих условиям $\mathbf{M}f = \mathbf{M}g = 0$ и $\mathbf{M}f^2 = \mathbf{M}g^2 = 1$. Если f_1 и g_1, на которых достигается верхняя грань (1), линейны, то $r_1(t)$ совпадает с обычной корреляционной функцией процесса x_t.

2. Далее рассматривается более узкий класс процессов, у которых совместное распределение x и y задается симметричной плотностью вероятности: $p(t, x, y) = p(t, y, x)$, причем предполагается, что эта плотность при $t \neq 0$ удовлетворяет условию

$$\iint_\Omega \frac{p(t, x, y)}{p(x)\, p(y)}\, dx dy < \infty, \tag{2}$$

где

$$p(x) = \int_a^b p(t, x, y)\, dy \quad \text{и} \quad \Omega = (a \leqslant x,\ y \leqslant b).$$

Определение 2. Последовательность собственных чисел $r_k(t)$ ядра $p(t, x, y)/\sqrt{p(x)\, p(y)}$ называется последовательностью собственных корреляционных функций процесса.

Определение 3. Если собственные функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, указанного ядра не зависят от t, то процесс называется максимально стационарным.

Определение 4. Процесс называется C-непрерывным, если $r_k(t)$ непрерывны; в частности, $\lim_{t \to 0} r_k(t) = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

3. Рассматриваются марковские процессы, у которых плотность $p(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$p(t_1 + t_2, x, y) = \int_a^b \frac{p(t_1, x, z)\, p(t_2, z, y)}{p(z)}\, dz.$$

В этом случае задание плотности вполне определяет процесс.

Теорема 1. *Симметричная плотность $p(t, x, y)$, удовлетворяющая ограничению), задает непрерывный марковский процесс тогда и только тогда, когда а) собственные функции ядра не зависят от t, т. е. процесс x_t максимально стационарный; собственные корреляционные функции имеют вид*

$$r_k(t) = \exp(-\lambda_k t), \text{ где } t \geqslant 0 \text{ и } 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots .$$

4. Предположим теперь, что существуют пределы

$$A(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^b (y - x) \frac{p(t, x, y)}{p(x)}\, dy \quad \text{и} \quad B(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^b (y - x)^2 \frac{p(t, x, y)}{p(x)}\, dy$$

что плотность вероятностей перехода $f(t, x, y) = p(t, x, y)/p(x)$ удовлетворяет равнениям Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(Af) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Bf). \tag{3}$$

другой стороны, по теореме 1

$$f(t, x, y) = p(y) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\, \varphi_k(y)\, e^{-\lambda_k t}\right]. \tag{4}$$

одставляя (4) в (3), получим

$$\frac{1}{2} B(x) \varphi_k''(x) + A(x) \varphi_k'(x) + \lambda_k \varphi_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$p(x) = \frac{\gamma}{B(x)} \exp\left[\int \frac{2A(x)}{B(x)}\, dx\right],$$

е γ — нормирующая константа.

5. Предположив, что $\varphi_k(x)$ — многочлен степени k ($k = 1, 2, \ldots$) и что область Ω сконечна, найдем все виды процессов, удовлетворящих нашим условиям:

а) если $\mathbf{M}x_t^3 = 0$, то процесс гауссовский, причем $\mathbf{M}x = \mathbf{M}y = 0$, $\mathbf{M}x^2 = \mathbf{M}y^2 = 1$ и $xy = \exp(-\lambda_1 t)$;

б) если $\mathbf{M}x_t^3 = c > 0$, то собственные функции представляют собой обобщенные линомы Лагерра и характеристическая функция двумерного распределения имеет вид

$$\varphi_c(\tau_1, \tau_2) = \frac{\exp\left\{-\frac{2i}{c}(\tau_1 + \tau_2)\right\}}{\left[1 - \frac{c}{2} i(\tau_1 + \tau_2) - \frac{c^2}{4}(1 - e^{-\lambda_1 t})\, \tau_1 \tau_2\right]^{4/c^2}}.$$

ри $c \to 0$ этот процесс сходится к гауссовскому.

Заседание 15 марта

Розанов Ю. А., Свойства сильного перемешивания в стационарных процессах.

Резюме опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том V, вып. 2

Заседание 29 марта

Филиппова А. А., Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Р. Мизес в работах [1], [2] поставил и исследовал задачу о предельном при $n \to \infty$ распределении симметрических функций величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Всякую такую функцию можно рассматривать как функционал от соответствующей эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$. Основной результат в этом направлении, принадлежащий Р. Мизесу (теорема Мизеса), состоит в том, что при выполнении определенных условий предельные распределения так называемых дифференцируемых функционалов $T[F_n^*]$ совпадают с предельными распределениями функционалов весьма частного вида, а именно,

$$T_m[F_n^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, \ldots, x_m) \prod_{i=1}^{m} d[F_n^*(x_i) - F(x_i)],$$

где число m и вид функции $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ определяются функционалом T и функцией распределения $F(x)$. Однако условия теоремы Мизеса, во-первых, весьма трудно проверить для конкретных функционалов, и, во-вторых, они оказываются невыполненными, по-видимому, во всех нетривиальных конкретных случаях. Тем не менее можно доказать, что теорема Мизеса справедлива для определенного класса функционалов, включающего в себя известные в математической статистике дифференцируемые функционалы, появляющиеся в связи с критериями согласия и оценками параметров распределения по выборке.

Можно доказать, что предельные при $n \to \infty$ распределения функционалов $T_m[F_n^*]$ совпадают с распределениями соответствующим образом определенных m-кратных стохастических интегралов, для которых при $m = 1$ и 2 могут быть получены характеристические функции. Изложенные выше результаты позволяют исследовать асимптотические свойства различных методов оценки неизвестных параметров по выборке, а также обосновать некоторые известные критерии согласия.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. R. V. Mises. On the asymptotic distribution of differentiable statistic functions. Ann. Math. Stat., **18**, 3 (1947), 309.

[2]. R. V. Mises. Rend. Math. e Appl. Fust. Naz. Mat. Roma, s. V, **11**, 3—4 (1952), 374.

Заседание 12 апреля

Севастьянов Б. А., Условия вырождения ветвящихся процессов с диффузией.

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения» том VI, вып. 3.

Заседание 11 октября

Смирнов Н. В., Вероятности больших значений односторонних непараметрических критериев.

Дается определение «правильного» размещения n точек в системе $(\nu+1)$ последовательных интервалов вещественной оси $\Delta_0(a, a+\alpha)$, $\Delta_1(a+\alpha, a+\alpha+d), \ldots, \Delta_{\nu-1}(a+\alpha+(\nu-1)d, b), d>0, \alpha>0, a+\alpha+(\nu-1)d<b$, $n>\nu$, предполагается, что точки размещаются независимо друг от друга и с вероятностями попадания в интервалы, пропорциональными их длинам. Говорят, что первое нарушение правильности размещения в системе происходит на s-м месте $s=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$, если $\sigma_l = h_1 + h_2 + \ldots + h_l > i+1$ (при $i=0, 1, 2, \ldots, (s-1)$ и $\sigma_s \leqslant s$, $s=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$), где h_i — число точек, попавших в Δ_i. Для вероятности первого нарушения правильности на s-м месте, p_{ns}, выводится формула

$$p_{ns} = \frac{\alpha}{(b-a)}\binom{n}{s}\left(\frac{\alpha+sd}{b-a}\right)^{s-1}\left(1-\frac{\alpha+sd}{b-a}\right)^{n-s}.$$

В качестве следствия из этой формулы получаются выражения точных законов распределения для различных односторонних непараметрических критериев согласия при конечных объемах выборки. Обозначая

$$D_n^+ = \sup_{-\infty<x<\infty} [F_n(x) - F(x)],\ D_n^+(\theta) = \sup_{x\in M_\theta} [F_n(x) - F(x)],$$

$$R_n^+(\theta) = \sup_{x\in M_\theta} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)},$$

где $M_\theta = \{x : F(x) \geqslant \theta\}$ и $0 < \theta < 1$; имеем для $0 < \varepsilon < 1$:

$$P_{1,n}(\varepsilon) = \mathbf{P}\{D_n^+ > \varepsilon\} = \sum_{s=0}^{[n(1-\varepsilon)]} a_n(\varepsilon, s),$$

$$P_{2n}(\varepsilon, \theta) = \mathbf{P}\{D_n^+(\theta) > \varepsilon\} = \sum_{s=0}^{n-[n(1+\varepsilon)\theta]} a_n(\varepsilon, s), \text{ причем } \theta + \varepsilon < 1,$$

$$P_{3n}(\varepsilon, \theta) = \mathbf{P}\{R_n^+(\theta) > \varepsilon\} = \sum_{s=0}^{n-[(1+\varepsilon)\theta n]-1} b_n(\varepsilon, s), \text{ причем } (1+\varepsilon)\theta < 1.$$

В этих формулах

$$a_n(\varepsilon, s) = \varepsilon \binom{n}{s} \left(\varepsilon + \frac{s}{n}\right)^{s-1} \left(1 - \varepsilon - \frac{s}{n}\right)^{n-s} \text{ и } b_n(\varepsilon, s) = \frac{a_n(\varepsilon, s)}{(1+\varepsilon)^n} \left(\frac{n-s}{n(1-\varepsilon)-s}\right)^{n-s}.$$

Предельные значения вероятностей $P_{1,n}(z/\sqrt{n})$, $P_{2n}(z/\sqrt{n}, \theta)$ и $P_{3,n}(z/\sqrt{n}, \theta)$ при $n \to \infty$ были получены в работах Н. В. Смирнова, Г. М. Мания и А. Реньи. Для вероятностей «больших» значений критериев, отвечающих $z \to \infty$, при $n \to \infty$ находим (предполагается, что $z = o(\sqrt{n})$):

$$P_{1,n}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \sim \exp\left\{-z^2 \int_0^1 \frac{u\,du}{\left(\tau_0 + \frac{uz}{\sqrt{n}}\right)\left(1 - \tau_0 - \frac{uz}{\sqrt{n}}\right)}\right\}, \tag{1}$$

где τ_0 — корень уравнения

$$\ln\left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}\tau}\right) - \frac{z}{\tau\sqrt{n} + z} = \ln\left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}(1-\tau)}\right) + \frac{z}{\sqrt{n}(1-\tau) - z},$$

причем имеет место разложение по степеням $\varepsilon = z/\sqrt{n}$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{8}{135}\varepsilon^3 - \ldots.$$

Из (1) следует, что

$$P_{1,n}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \sim \begin{cases} \exp(-2z^2), \text{ если } z = o\left(n^{\frac{1}{4}}\right), \\ \exp\left(-2z^2 - \frac{40}{9}\frac{z^4}{n}\right), \text{ если } z = o\left(n^{\frac{1}{3}}\right), \end{cases}$$

и так далее. Для P_{2n} находим

$$P_{2,n}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}, \theta\right) \sim$$

$$\sim \frac{\theta}{z(2\theta-1)} \sqrt{\frac{2\theta(1-\theta)}{\pi}} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}\theta}\right)^{n\theta + z\sqrt{n}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}(1-\theta)}\right)^{n(1-\theta) - z\sqrt{n}}},$$

откуда следует, что

$$P_{2,n}\left(\frac{z}{\sqrt{n}},\ \theta\right) \sim$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{\theta}{z(2\theta-1)}\sqrt{\dfrac{2\theta(1-\theta)}{\pi}}\exp\left\{-\dfrac{z^2}{2\theta(1-\theta)}\right\}, & \text{если } z = o\left(n^{\frac{1}{6}}\right), \\ \dfrac{\theta}{z(2\theta-1)}\sqrt{\dfrac{2\theta(1-\theta)}{\pi}}\exp\left\{-\dfrac{z^2}{2\theta(1-\theta)}+\dfrac{z^3(1-2\theta)}{6\sqrt{n}\theta^2(1-\theta)}\right\}, & \text{если } z = o\left(n^{\frac{1}{4}}\right). \end{cases}$$

Наконец, при $z = o(\sqrt{n})$

$$P_{3,n}\left(\frac{z}{\sqrt{n}},\ \theta\right) \sim \frac{1}{z}\sqrt{\frac{2(1-\theta)}{x\theta}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}\theta}\right)^{n\theta}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{-n}.$$

Заседание 25 октября

Боровков А. А., Большие уклонения и асимптотические разложения в задаче о двух выборках.

Содержание доклада будет опубликовано в сборнике: Труды VI всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, изд. АН Литовской ССР, 1961.

Заседание 15 ноября

Чибисов Д. М., О мощности критерия омега-квадрат.

Содержание доклада опубликовано в журнале ДАН СССР, том 138, № 2.

Заседание 29 ноября

Большев Л. Н., Об исключении грубых наблюдений.

Сообщение посвящено вопросам приближенного вычисления критических значений для некоторых критериев выявления резко выделяющихся наблюдений.

1. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному распределению с параметрами (a, σ), и пусть $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\Sigma\xi_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(\xi_j - \overline{\xi})^2$, $\zeta_i = \frac{\xi_i - \overline{\xi}}{s}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $\eta = \max_i \zeta_i$, $\zeta = \max_i |\zeta_i|$. Так как распределение $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ не зависит от неизвестных параметров, то в дальнейшем будет предполагаться, что $a = 0$ и $\sigma = 1$. В 1929 г. в работе [1] был предложен односторонний критерий для выявления резко выделяющихся наблюдений, основанный на статистике η. Было замечено, что если $z \geqslant \sqrt{n/2}$, то

$$\mathbf{P}\{\eta > z\} = n\mathbf{P}\{\zeta_1 > z\}. \qquad (1)$$

С помощью равенства (1) составлена таблица процентных точек распределения η для небольших значений n.

В 1941 г. Н. В. Смирновым [2] выведена формула для функции распределения величины η (при всех n); эти исследования были повторены Ф. Грэббсом в 1950 г. [5], который с помощью электронной вычислительной машины составил для η таблицы функции распределения и процентных точек (в конечном интервале изменения n). В 1952 г. в работе [6] была выведена формула функции распределения величины ζ, которая представляет собой статистику двустороннего критерия; в частности, было показано, что при $n \leqslant 25$ и $\varepsilon \leqslant 0{,}2$ $(1-\varepsilon)$-квантили распределения ζ практически совпадают с $(1-\varepsilon/2)$-квантилями распределения η.

В дальнейшем будут рассматриваться лишь квантили распределения величины ζ. Цель данного сообщения — показать, что удовлетворительные приближения для этих квантилей можно вычислить с помощью равенства (1) при всех n.

2. Так как $\{\zeta > z\} = \bigcup\{\zeta_i^2 > z^2\}$, то в силу известных неравенств

$$n\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2\} - \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2,\ \zeta_2^2 > z^2\} \leqslant \mathbf{P}\{\zeta > z\} \leqslant n\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2\}. \qquad (2)$$

Можно показать, что в условиях п. 1 при любом n

$$\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2,\ \zeta_2^2 > z^2\} \leqslant \mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2\}\,\mathbf{P}\{\zeta_2^2 > z^2\} = \mathbf{P}^2\{\zeta_1^2 > z^2\}. \tag{3}$$

Если (3) подставить в (2), то получим

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)n^2\mathbf{P}^2\{\zeta_1^2 > z^2\} \geqslant \mathbf{P}\{\zeta > z\} - n\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2\} \leqslant 0.$$

Итак, если в качестве приближенного значения $(1-\varepsilon)$-квантили распределения ζ спользоваться решением $z(\varepsilon)$ уравнения $n\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2\} = \varepsilon$, то истинный уровень значи- сти $\mathbf{P}\{\zeta > z(\varepsilon)\}$ будет иметь относительную погрешность, не превышающую $\varepsilon/2$.

3. Если результаты наблюдений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ подвергнуть ортогональному преобразо- нию, при котором двумя новыми координатами являются $\sqrt{n}\,\bar{\xi}$ и $\sqrt{n(n-1)}\,(\xi_1 - \bar{\xi})$, легко можно убедиться в справедливости равенства

$$\mathbf{P}\{\zeta_1^2 > z^2\} = 1 - I_x\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}-1\right), \tag{4}$$

е $x = z^2/(n-1)$, и $I_x(p, q)$,—неполная B-функция с параметрами p и q. Отсюда сле- ет, что случайная величина $\zeta_1\sqrt{\dfrac{n-2}{n-1-\zeta_1^2}}$ подчиняется распределению Стью- нта с числом степеней свободы $n-2$ (см. [7], стр. 266). Таким образом, указанная п. 2 функция z определяется равенством

$$z^2(\varepsilon) = (n-1)\frac{t_{n-2}^2\left(\dfrac{\varepsilon}{n}\right)}{t_{n-2}^2\left(\dfrac{\varepsilon}{n}\right)+n-2}, \tag{5}$$

е $t_m(\delta)$ есть $(1-\delta/2)$-квантиль распределения Стьюдента с m степенями свободы. ормула (5) позволяет вычислять z для тех значений n и ε, которые не охватываются блицей Ф. Грэббса [5]. Для вычисления соответствующих значений t можно воспользо- ться таблицами [4].

4. Соображения, высказанные в п. 3, можно сформулировать в виде следующего авила ($S_m(t)$ — функция распределения Стьюдента):

Если случайная величина $S_{n-2}\left(\zeta\sqrt{\dfrac{n-2}{n-1-\zeta^2}}\right)$ *превосходит* $1-\varepsilon/2n$, *то сле- ет считать, что резко выделяющееся наблюдение содержит грубую ошибку; в про- вном случае подозрение о наличии грубой ошибки надо полагать необоснованным.*

Для такого критерия вероятность ложного выявления грубой ошибки приближенно вна ε (в силу (2) и (3) эта вероятность меньше ε и больше $\varepsilon - \varepsilon^2/2$).

5. Если $n \geqslant 20$, то в силу (4) для вычисления $z^2(\varepsilon)$ применима асимптотическая ормула (см. [8]):

$$z^2(\varepsilon) \sim \frac{2(n-1)u^2}{2n-5+u^2-(3+u^2+2u^4)\dfrac{1}{6(2n-5)}},$$

е u определяется равенством

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u}^{u}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx = 1-\frac{\varepsilon}{n}.$$

6. Для проверки постоянства дисперсий в k выборках объема m из нормальных вокупностей можно воспользоваться критерием Кочрена [9]. Пусть $s_1^2, \ldots, s_k^2$—взаимно зависимые случайные величины, распределенные как $\sigma^2\chi^2/(m-1)$ с $m-1$ степенями ободы, и пусть $G_i = s_i^2/\sum_{j=1}^{k} s_j^2$ (s_i^2 — наилучшие несмещенные оценки для неизвестной сперсии). Критерий Кочрена основан на статистике $G = \max_i G_i$. Кочрен доказал (идея

его доказательства использована выше в п. 1), что если $k\mathbf{P}\{G_1 > w\} = \varepsilon$, то $\mathbf{P}\{G > w\}$ отличается от ε менее чем на $\varepsilon^2/2$. Случайная величина G_1 подчиняется B-распределению с параметрами $p = \frac{1}{2}(m-1)$ и $q = \frac{1}{2}(m-1)(k-1)$ (таблица функции $w = w(\varepsilon, m, k)$, определяемой уравнением $k\mathbf{P}\{G_1 > w\} = \varepsilon$, имеется в [3]). Если $m = 2$ и $k = n-1$, то легко можно убедиться, что распределение величины $(n-1)G_1$ совпадает с распределением величины ζ_1^2 (см. п. 2), поэтому

$$z^2\left(\frac{n\varepsilon}{n-1}\right) = (n-1)\,w(\varepsilon, 2, n-1).$$

Это равенство устанавливает связь между приближенными критическими значениями критериев однородности средних и дисперсий.

В общем случае для функции w можно указать асимптотическое выражение, аналогичное формуле в п. 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. S. Pearson, C. Chandra Sekar, The efficiency of statistical tools and a criterion for the rejection of outlying observations, Biometrika, **28** (1936), 303—320.

[2] Н. В. Смирнов, Об оценке максимального члена в ряду наблюдений, ДАН СССР **33** (1941), 346—349.

[3] И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), М., ГИТТЛ, 1955.

[4] Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента (Под ред. Н. В. Смирнова), М., Изд. АН СССР, 1960.

[5] F. Grubbs, Sample criteria for testing outlying observations, Ann. Math. Statistics **21**, 1 (1950), 27—58.

[6] А. М. Бендерский, О распределении модуля максимального отклонения от среднего в ряду наблюдений, ДАН СССР, **85** (1952), 5—8.

[7] Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.

[8] Л. Н. Большев, Об оценках вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **V**, (1960), 453—457.

[9] W. G. Cochran, The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total, Annals of Eugenics, **11** (1941), 47—52.

Заседание 13 декабря

Сарманов О. В., О свойствах двумерной плотности, определяющей стационарный марковский процесс.

Теорема 1. *Пусть* $p(x) > 0$ *— плотность вероятности на* $[a, b]$ *и пусть* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ *— семейство ортонормированных функций:*

$$\int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,p(x)\,dx = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l; \end{cases} \qquad \int_a^b \varphi_k(x)\,p(x)\,dx = 0.$$

Если p *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, *то при любых* $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ *и достаточно малом* $t > 0$ *сумма*

$$f(t, x, y) = p(x)\,p(y)\left[1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\right] \qquad (1)$$

в квадрате $a \leqslant x,\ y \leqslant b$ *— знакопеременная функция и поэтому она не может быть плотностью вероятности.*

Теорема 2. *Для любой априорной плотности* $p(x) > 0$ *и разрывных* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *существуют разрывные стационарные марковские процессы, определяемые плотностями вида (1).*

Заседание 27 декабря

Золотарев В. М., Об одной вероятностной задаче.

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том VI, вып. 2.

Большев Л. Н., Уточнение неравенства Крамера — Рао.

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том VI, вып. 3.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1961

СОДЕРЖАНИЕ ШЕСТОГО ТОМА

Выпуск первый

Серегин Л. В. Условия непрерывности вероятностных процессов 3
Seregin L. V. Continuity Conditions of Stochastic Processes 29
Чистяков В. П. Переходные явления в ветвящихся процессах с n типами частиц 31
Cistyakov V. P. Transient Phenomena in Branching Stochastic Processes . . 45
Волконский В. А. Построение неоднородных марковских процессов с помощью случайной замены времени 47
Volkonsky V. A. Construction of Inhomogeneous Markov Processes by Means of a Random Time Substitution 56
Гладышев Е. Г. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями 57
Gladyshev E. G. A new Limit Theorem for Stohastic Processes with Gaussian Increments 66
Нагаев С. В. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова . 67
Nagaev S. V. More Exact Statements of Limit Theorems for Homogeneous Markov Chains 86

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Прохоров Ю. В., Сазонов В. В. Некоторые результаты, связанные с теоремой Бохнера 87
Prohorov Yu. V., Sazonov V. V. Some Results Associated with Bochner's Theorem 93
Леонов В. П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса 93
Leonov V. P. On the Dispersion of Time-dependent Means Stationary Stochastic Process 101
Беляев Ю. К. Один пример процесса с перемешиванием 101
Beljaev Yu. K. An Example of Stochastic Process with Mixing 103
Рогозин Б. А. Об одной оценке функций концентраций 103
Rogozin B. A. On Evaluating the Concentration Functions 105
Рогозин Б. А. Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин 106
Rogozin B. A. On the Increase of Dispersion of Sums of Independent Random Variables 108
Боровков А. А. Локальные теоремы и моменты для максимума сумм решетчатых ограниченных слагаемых 108
Borovkov A. A. Local Theorems and Moments for Maximums of Sums of Lattice Restricted Components 110
Kemeny J. G., Snell J. L. Finite Continuous Time Markov Chains 110
Кемени Д., Снел Л. Конечные цепи Маркова с непрерывным временем . . 115
Воробьев Н. И., Фаддеев Д. К. Континуализация условных вероятностей . . 116
Vorobjev N. N., Faddeyev D. K. Continualization of Conditional Probabilities 118
Хасьминский Р. З. О предельных распределениях сумм условно независимых случайных величин 119
Hasminsky R. Z. On Limit Distributions for Sums of Conditionally Independent Random Variables 125
Тутубалин В. Н Инвариантные случайные меры на сфере 125

Tutubalin V. N. Les mesures aléatoires invariantes sur la sphére 130
Хазен Э. М. Определение одномерной плотности распределения и моментов случайного процесса на выходе существенно нелинейной системы . . 130
Khasen E. M. Evaluation of the Single-Dimensional Probability Density of Random Process in the Output of a Nonlinear System 138
Смирнов С. В., Потапов М. К. Номограмма для функции вероятности χ^2 . . 138
Smirnov S. V., Potapov M. K. Nomograms for Probability Functions χ^2 . . 140
Информация о VI Совещании по теории вероятностей и математической статистике 140

Выпуск второй

Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. I 145
Linnik Yu. V. Limit Theorems for the Sums of Independent Variables Taking into Account the Big Deviations. I 162
Матвеев Р. Ф. О регулярных многомерных стационарных процессах . . . 164
Matveyev R. F. Sur les Processus Réguliers Stationnaires vectorielles . . 181
Hàjek J. On Linear Estimation Theory for an Infinite Number of Observations . 182
Гаек Я. К теории линейных оценок при бесконечном количестве наблюдений 193
Сарымсаков Т. А. Неоднородные цепи Маркова 194
Sarimsakov T. A. Inhomogeneous Markov Chains 201
Волконский В. А., Розанов Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций. II 202
Volkonsky V. A., Rozanov Yu. A. Some Limit Theorems for Random Functions. II 215

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Арато М. О достаточных статистиках стационарных гауссовских случайных процессов 216
Arató M. Sufficient Statistics of Stationary Gaussian Processes 218
Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче 219
Zolotarev V. M. Concerning a Certain Probability Problem 222
Коваленко И. Н. Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением . 222
Kovalenko I. N. Some Queing Problems with Restrictions 228
Лян Чжи-шуэн. Инвариантность строго марковского свойства при преобразованиях Дынкина 228
Leung Chi-son Invariability of the Strong Warkov Property in the Transformations of E. B. Dynkin 231
Постникова Л. П. О связи понятий коллектива Мизеса — Черча и нормальной по Бернулли последовательности знаков 232
Postnikova L. P. Über die Zusammenhang der Begriffe des Kollektives von Mises — Church und der nach Bernoulli normalen Zeichenfolge . . . 234
Хазен Э. М. Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностями кусочно-линейного типа . . . 234
Khasen E. M. Estimating the Probability Density for Random Processes in Systems with Nonlinear Reformers of the Piecing-linear Type 241
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара по математической статистике в Математическом ин-те АН СССР 242
Kruskal W. Missing and Extra Observations in Analysis of Variance 251
Крускал В. Недостающие и излишние наблюдения в дисперсионном анализе 251

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу Ю. В. Линника «Разложения вероятностных законов» *Б. В. Гнеденко* 252
Рецензия на книгу Е. Б. Дынкина «Основания теории марковских процессов» *Ю. А. Розанов* 253
Рецензия на книгу Е. Хеннан «Анализ временных рядов» *Ю. А. Розанов* . . 255

Выпуск третий

ешалкин Л. Д. О приближении распределений сумм неограниченно-делимыми законами 257
Meshalkin L. D. On Approximations of Distribution Functions of Sums by Infinitely Divisible Laws 275
евастьянов Б. А. Условия вырождения ветвящихся процессов с дуффузией . 276
Sevastjanov B. A. The Extinction Conditions for Branching Processes with Diffusion 286
короход А. В. Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами 287
Skorohod A. V. Stochastic Equations for Diffusion Processes in a Bounded Region 298
илиппов А. Ф. О распределении размеров частиц при дроблении 299
Filippov A. F. Über das Verteilungsgesetz der Grössen der Teilchen bei Zerstückelung 318

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ольшев Л. Н. Уточнение неравенства Крамера — Рао 319
Bolshev L. N. The Refinement of the Cramér — Rao Inequality 326
олков И. С. Анализ некоторых предельных теорем для больших уклонений . 327
Volkov I. S. Analysis of Some Limit Theorems for Large Deviations . . . 329
олотарев В. М. Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения 330
Zolotarev V. M. On the Asymptotic Behavior of a Class of Infinitely Divisible Laws 334
ороляк В. С. Об асимптотике некоторых функционалов в решетчатой схеме блуждания 334
Koroljuk V. S. The Asymptotes of Several Functionals in a Lattice Random Walk 341
ордонский Х. Б. Распределение числа дефектных единиц в партиях изделий . 342
Kordonsky H. B. The Distribution of the Number of Defective Hems in Lots . 349
озанов Ю. А. О применимости центральной предельной теоремы к стационарным процессам после их прохождения через линейный фильтр 349
Rozanov Yu. A. On the Applicability of the Central Limit Theorem to Stationary Processes Passed Through a Linear Filter 350
охлин В. А. Об энтропии автоморфизма компактной коммутативной группы . 351
Rohlin V. A. On the Entropy of Automorphism of a Commutative Compact Group 352
алаевский О. В. Краткое доказательство неравенства Крамера — Рао . . 352
Shalayevsky O. V. A Short Proof of the Cramér — Rao Inequality 353
ибисов Д. М. О критериях согласия, основанных на выборочных промежутках 354
Chibisov D. M. On the Tests of fit Based on Sample Spacings 358
езюме докладов, сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Московского Университета 359
Summary of Papers Presented at the Probability Research Seminar, Moscow University 259
езюме докладов, сделанных на заседаниях секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического общества (ноябрь—декабрь 1960 г.) 365
Summary of Papers Presented at the Sessions of the Probability and Statistics Section of Moscow Mathematical Society (November — December, 1960) . 365

Выпуск четвертый

инник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. II 377
Linnik Yu. V. Limit Theorems for the Sums of Independent Variables Taking into Account the Big Deviations. II 391
лосс Б. М. Предельные распределения на бикомпактных абелевых группах . 392
Kloss B. M. Limiting Distributions on Bicompact Abelian Groups . . . 421

Воробьев Н. Н. Аналитическая характеризация независимости и марковости . . 42
Vorobyev N. N. An Analytical Characterization of Independence and Markov Type Dependence 42
Романовский И. В. Случайные блуждания игрового типа 42
Romanovsky I. V. Game-type Random Walks 42
Скороход А. В. Аддитивные функционалы от процесса брауновского движения . 43
Skorohod A. V. Additive Functionals of the Brownian Movements Process . 43
Вентцель А. Д. Об абсолютной непрерывности переходных вероятностей одномерного диффузионного процесса 43
Wentzell A. D. Sur la Continuité Absolue des Probabilités de transition d'un Processeus de Diffusion un-dimensionnel 44
Большев Л. Н., Гладков Б. В., Щеглова М. В. Таблицы для вычисления функций B и Z-распределений 44
Bolshev L. N., Gladkov B. V., Ščeglova M. V. Tables for Calculation of B and Z-distribution Functions 45
Баваров Е. А., Беляев П. Ф. О проверке случайности выбора без возвращения . 45
Bavarov E. A., Beljaev P. F. On Testing the Randomness of Sampling without Replacement 45
Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Некоторые задачи с условной вероятностью и квазимоментные функции 45
Kuznetsov P. I., Stratonovich R. L., Tihonov V. I. Some Problems with Conditional Probability and Quasimoment Functions 46
Полищук Е. М. О континуальных средних и сингулярных распределениях . . 46
Polisčuk E. M. On Continual Means and Singular Distributions 46
Золотарев В. М., Королюк В. С. Об одной гипотезе Б. В. Гнеденко 46
Zolotarev V. M., Koroljuk V. S. On a hipothesis proposed by B. V. Gnedenko 47
Булинская Е. В. О среднем числе пересечений некоторого уровня стационарным гауссовским процессом 47
Bulinskaya E. V. On the Mean Number of Grossings of a Level by a Stationary Gaussian Process 47
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара по математической статистике в Математическом ин-те АН СССР 47
Содержание шестого тома 48

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В — 234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Е. И. Гришина*

Подписано к печати 16/XI-1961 г.		Тираж 2625 экз.	Зак. 3992
Формат бум. $70\times108^1/_{16}$	Печ. л. 9,59	Бум. л. $3^1/_2$	Уч.-изд. л. 11,5

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

ГНТК НТБ

Цена 1 р. 13 к. 9 1.12 ТЕОР ВЕР

2-26

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

на журналы Издательства Академии наук СССР на 1962 год

Название журнала	Кол-во номеров в год	Подписная цена	
		Годовая	Полугодовая
Общеакадемические журналы			
Вестник Академии наук СССР	12	9—60	4—80
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	51—84	25—92
Доклады Академии наук СССР (с 6-ю коленкоровыми папками с тиснением)	36	54—24	27—12
Природа	12	8—40	4—20
Физико-математические науки			
Акустический журнал	4	4—80	2—40
Астрономический журнал	6	9—90	4—95
Геомагнетизм и аэрономия	6	9—00	4—50
Журнал вычислительной математики и математической физики	6	9—00	4—50
Журнал технической физики	12	12—60	6—30
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	28—80	14—40
Известия Академии наук СССР:			
серия геофизическая	12	18—00	9—00
серия математическая	6	9—00	4—50
серия физическая	12	14—40	7—20
Кристаллография	6	9—00	4—50
Математический сборник	12	14—40	7—20
Оптика и спектроскопия	12	16—20	8—10
Приборы и техника эксперимента	6	9—78	4—89
Теория вероятностей и ее применения	4	4—52	2—26
Физика твердого тела	12	30—00	15—00
Химические науки			
Высокомолекулярные соединения	12	15—00	7—50
Геохимия	12	9—00	4—50
Журнал аналитической химии	6	7—20	3—60
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	4—50	2—25
Журнал неорганической химии	12	27—00	13—50
Журнал общей химии	12	33—00	16—50
Журнал прикладной химии	12	22—56	11—28
Журнал физической химии	12	27—00	13—50
Известия Академии наук СССР. Отделение химических наук	12	18—00	9—00
Коллоидный журнал	6	7—20	3—60
Нефтехимия	6	7—50	3—75
Радиохимия	6	7—20	3—60
Успехи химии	12	9—60	4—80
Геолого-географические науки			
Геология рудных месторождений	6	7—20	3—6
Записки Всесоюзного минералогического общества	6	7—20	3—6
Известия Академии наук СССР			
серия географическая	6	9—00	4—5
серия геологическая	12	14—40	7—2
Известия Всесоюзного географического общества	6	5—40	2—7
Океанология	6	9—00	4—5
Биологические науки			
Биофизика	6	7—20	3—6
Биохимия	6	10—80	5—4
Ботанический журнал	12	18—00	9—0
Вопросы ихтиологии	4	6—00	3—0
Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова	6	9—00	4—5
Журнал общей биологии	6	4—50	2—2
Зоологический журнал	12	18—00	9—0
Известия Академии наук СССР:			
серия биологическая	6	9—00	4—5
Микробиология	6	9—00	4—5
Палеонтологический журнал	4	6—00	3—0
Почвоведение	12	14—40	7—2
Радиобиология	6	7—50	3—7
Успехи современной биологии	6	4—80	2—4
Физиологический журнал СССР им. И. М. Сеченова	12	14—40	7—2
Физиология растений	6	7—20	3—6
Цитология	6	7—20	3—6
Энтомологическое обозрение	4	9—00	4—5
Технические науки			
Автоматика и телемеханика	12	13—56	6—7
Известия Академии наук СССР:			
Отделение технических наук:			
металлургия и топливо	6	7—50	3—7
механика и машиностроение	6	7—50	3—7
энергетика и автоматика	6	7—50	3—7
Инженерный журнал	4	6—00	3—0
Прикладная математика и механика	6	10—80	5—4
Радиотехника и электроника	12	16—50	8—2

Подписка принимается повсеместно в пунктах подписки «Союзпечати», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах и фабриках, в научно-исследовательских институтах, учебных заведениях и организациях, а также отделениями и магазинами «Академкнига» и конторой «Академкнига» по адресу:

МОСКВА, ЦЕНТР, Б. ЧЕРКАССКИЙ ПЕР., 2/10